
Počítačová grafika III – Bidirectional path tracing

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

“Science, it works ...

(bitches!)”

Quote from Richard Dawkins

<http://www.youtube.com/watch?v=n6hx01sC-dU>

... and so does path tracing!



Jerome White

Path Tracing funguje!



Martin Geupel (DeadClown)

raccoon-artworks.de

Path Tracing funguje!





Light transport – Global illumination

Archviz



Movies



Image courtesy of Columbia Pictures.
© 2006 Columbia Pictures Industries, Inc.

Light transport – Global illumination

Movies

- **2002, Shrek 2**
(PDI/Dreamworks)
 - 1 bounce indirect
- **2006, Monster House**
(Sony Imageworks)
 - **Full light transport**
(path traced)
 - Arnold renderer



Image courtesy of Columbia Pictures.
© 2006 Columbia Pictures Industries, Inc.

Light transport – Global illumination

Movies

- **2006, Monster House**
(Sony Imageworks)
 - ❑ **Full light transport**
(path traced)
 - ❑ **Arnold renderer**



Image courtesy of Columbia Pictures.
© 2006 Columbia Pictures Industries, Inc.

- **Full light transport simulation**
 - ❑ Accuracy
 - ❑ Ease of use
 - ❑ **Visual consistency**

Light transport – Global illumination

- **More information**

- “The State of Rendering”



- **Full light transport simulation**

- Accuracy
- Ease of use
- **Visual consistency**

Měřicí rovnice

Měřicí rovnice

- Zobrazovací rovnice
 - Podmínky pro radianci v rovnovážném stavu
 - Umožňuje výpočet radiance v izolovaných bodech
- Ve skutečnosti nás zajímá průměrná radiance přes pixel: integrál
- **Měřicí rovnice** (Measurement equation)

Měřicí rovnice

odezva virtuálního (lineárního) senzoru na radianci (**barva pixelu**)

relativní odezva senzoru (váha)
různé W_e pro každý senzor (pixel)

$$I = \int_{M H(\mathbf{x})} \int W_e(\mathbf{x}, \omega) \cdot L_i(\mathbf{x}, \omega) \cdot \cos \theta \, d\omega \, dA$$

přes celou plochu scény a všechny směry
(virtuální senzory musí být součástí scény,
nenulový příspěvek pouze na ploše senzoru kvůli W_e)

Příklad: Zářivý tok přes oblast jako měřicí rovnice

- Dána oblast S

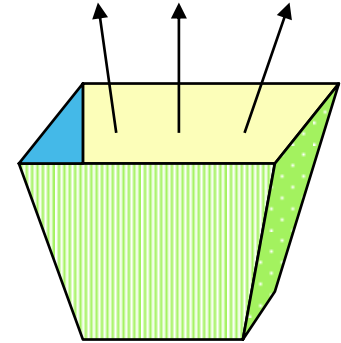
$$S \subset M \times H$$

(podmnožina povrchu scény a příslušných směrů)

- Pro W_e definované

$$W_e(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, \omega) \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je výsledkem měřicí rovnice **zářivý tok** $\Phi(S)$.



Měřicí rovnice jako skalární součin funkcí

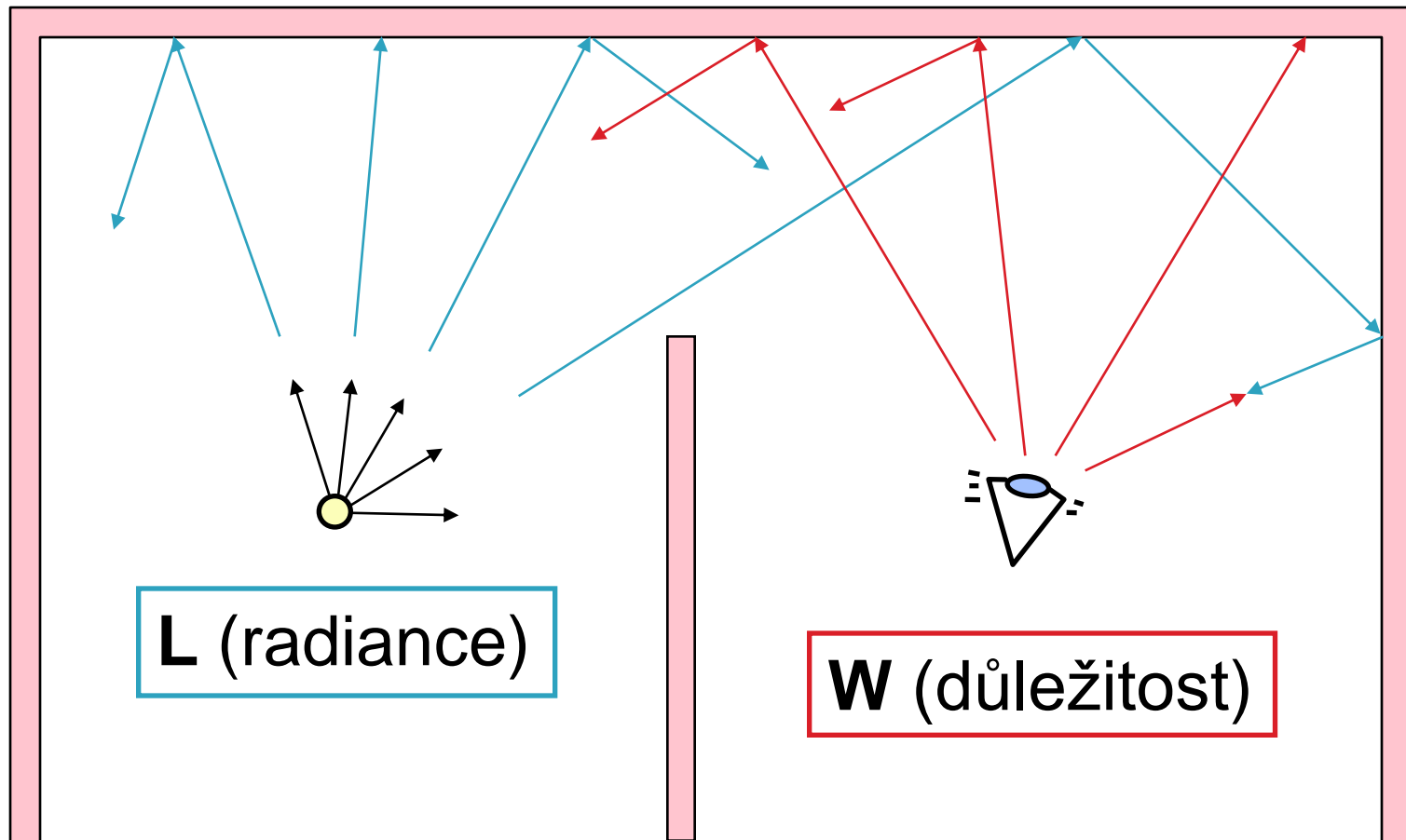
- Definujme **skalární součin funkcí f a g** :

$$\langle f, g \rangle = \int_{M} \int_{H(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \omega) \cdot g(\mathbf{x}, \omega) \cdot \cos \theta \, d\omega \, dA$$

- **Měřicí rovnice**

$$I = \langle W_e, L_i \rangle$$

Propagace radiance a důležitosti



Důležitost (importance)

- W_e popisuje, jak důležitá je příchozí radiance pro odezvu senzoru
- 1 krok do scény: Příchozí radiance na senzoru = odchozí radiance z bodů scény
- 2, 3, ... kroky do scény: ...
- W_e interpretujeme jako veličinu emitovanou ze sensorů (stejně jako je radiance L_e emitovaná ze zdrojů světla)
- Takto interpretovanou veličinu W_e nazýváme **emitovanou funkcí důležitosti** (emitted importance function, emitted potential function)

Přenos důležitosti

- Funkce důležitosti se přenáší podobně jako radiance a dosahuje **ustáleného stavu** popsaného **ustálenou funkcí důležitosti W** :

$$W(\mathbf{x}, \omega_o) = W_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} W(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot \underbrace{f_r(\mathbf{x}, \omega_o \rightarrow \omega_i)} \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

Jako v zobrazovací rovnici, s tím rozdílem, že parametry BRDF jsou zaměněny (pro odraz výsledek identický, nikoli však pro lom)

Dualita důležitosti a radiance

**emitovaná
importance**

**ustálená
příchozí
radiance**

$$I = \langle W_e, L_i \rangle$$
$$= \langle W_i, L_e \rangle$$

**ustálená
příchozí
importance**

**emitovaná
radiance**

Dualita důležitosti a radiance – důkaz

The proof of Eq. (9), i.e., $I = \langle W^e, L \rangle = \langle L^e, W \rangle$ given here follows [Kalos and Whitlock 2008]. We can write $Q = \int_{\Omega} L(\mathbf{r}) W(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ in two possible ways, either by expanding $L(\mathbf{r})$ using the radiation transport equation (1) or by expanding $W(\mathbf{r})$ using the importance transport equation (8):

$$Q = \int_{\Omega} L^e(\mathbf{r}) W(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{\Omega} \int_{\Omega} L(\mathbf{r}') T(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) W(\mathbf{r}) d\mathbf{r}' d\mathbf{r},$$

$$Q = \int_{\Omega} L(\mathbf{r}) W^e(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{\Omega} \int_{\Omega} L(\mathbf{r}) T(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') W(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}.$$

We can now swap \mathbf{r} and \mathbf{r}' in one of the double integrals on the r.h.s. to see that they are in fact equal. This immediately yields the desired result.

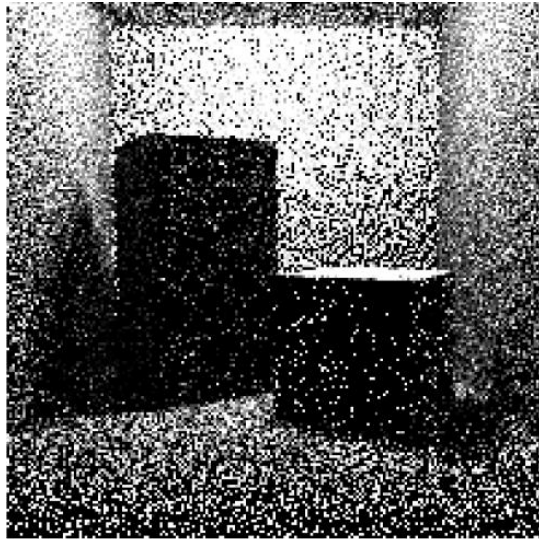
Dualita důležitosti a radiance

- V dané scéně je pouze jediná emitovaná a ustálená funkce radiance
- **Ale každý pixel má jinou emitovanou a ustálenou funkci důležitosti**

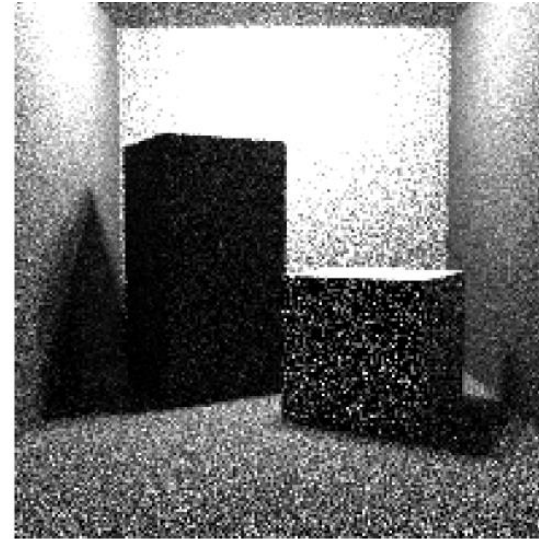
Dualita v praxi: Sledování světla

- Sledování cest (path tracing)
 - Rekurzivně řeší zobrazovací rovnici
- **Sledování světla (light tracing)**
 - Rekurzivně řeší rovnici přenosu důležitosti
 - Cesty začínají na zdrojích světla
 - Mohou náhodně zasáhnout senzor
 - Nebo explicitní napojení na senzor (jako přímé osvětlení v PT)
 - **Pozor:** argumenty BRDF musí být obráceny (cestu sledujeme z druhé strany, BRDF je pořád stejně orientovaná)

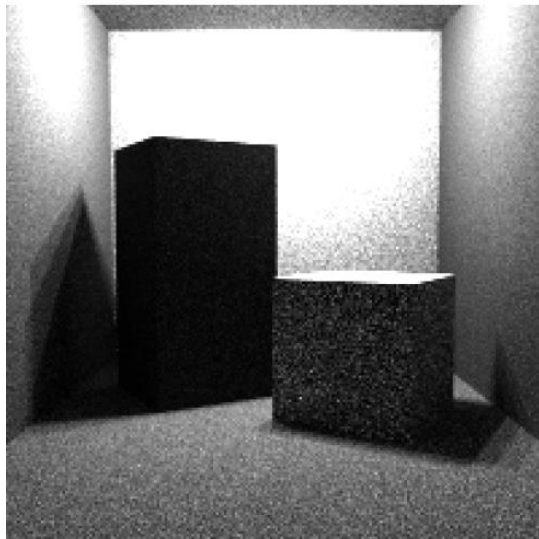
Sledování světla (light tracing) v praxi



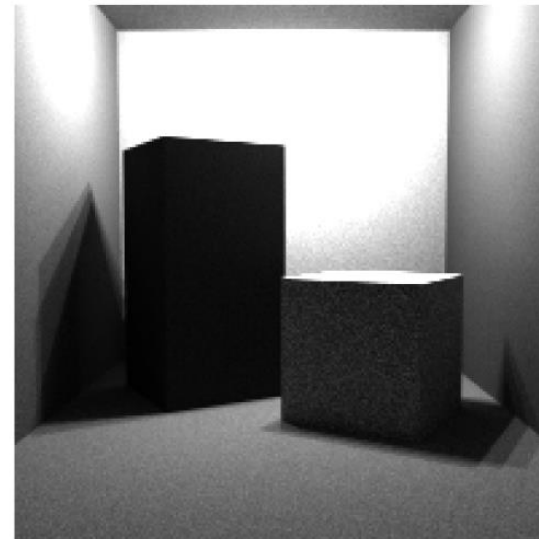
100,000 light rays



1,000,000 light rays



10,000,000 light rays

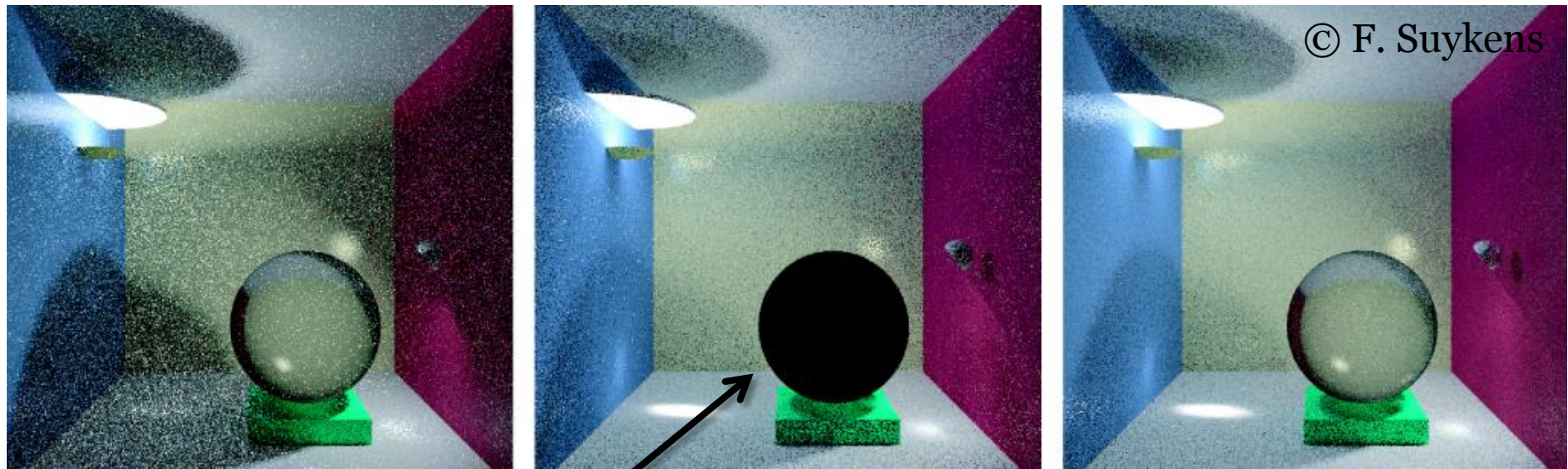


100,000,000 light rays

Sledování světla (light tracing) v praxi

- Obvykle menší účinnost než PT
 - (ale např. v opt. akt. médiu blízko světla mnohem lepší)
- Mnohem účinnější pro některé světelné efekty (kaustiky)
- Základ obousměrných metod
 - Obousměrné sledování cest (bidirectional path tracing, BPT)
 - Photon mapping, etc.

Porovnání algoritmů



Path tracing

Light tracing

Bidirectional path tracing

Kvíz: Proč je skleněná koule černá?

Pokročilé metody simulace transportu světla

Issues in light transport simulation

■ Robustness

- None of the existing algorithms works for all scenes

- Robust estimation

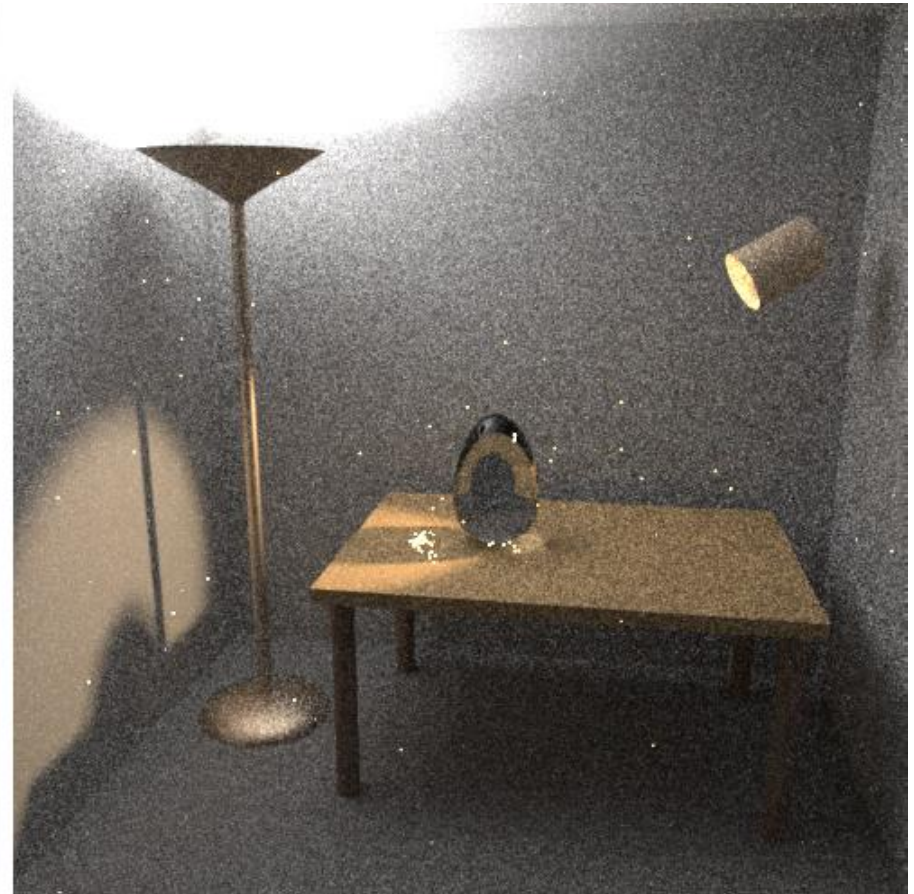
“An estimation technique which is insensitive to small departures from the idealized assumptions which have been used to optimize the algorithm.”

Wolfram MathWorld™
the web's most extensive mathematics resource

Obousměrné sledování cest (BPT) vs. (Jednosměrné) sledování cest (PT)



BPT, 25 vzorků (cest) na pixel



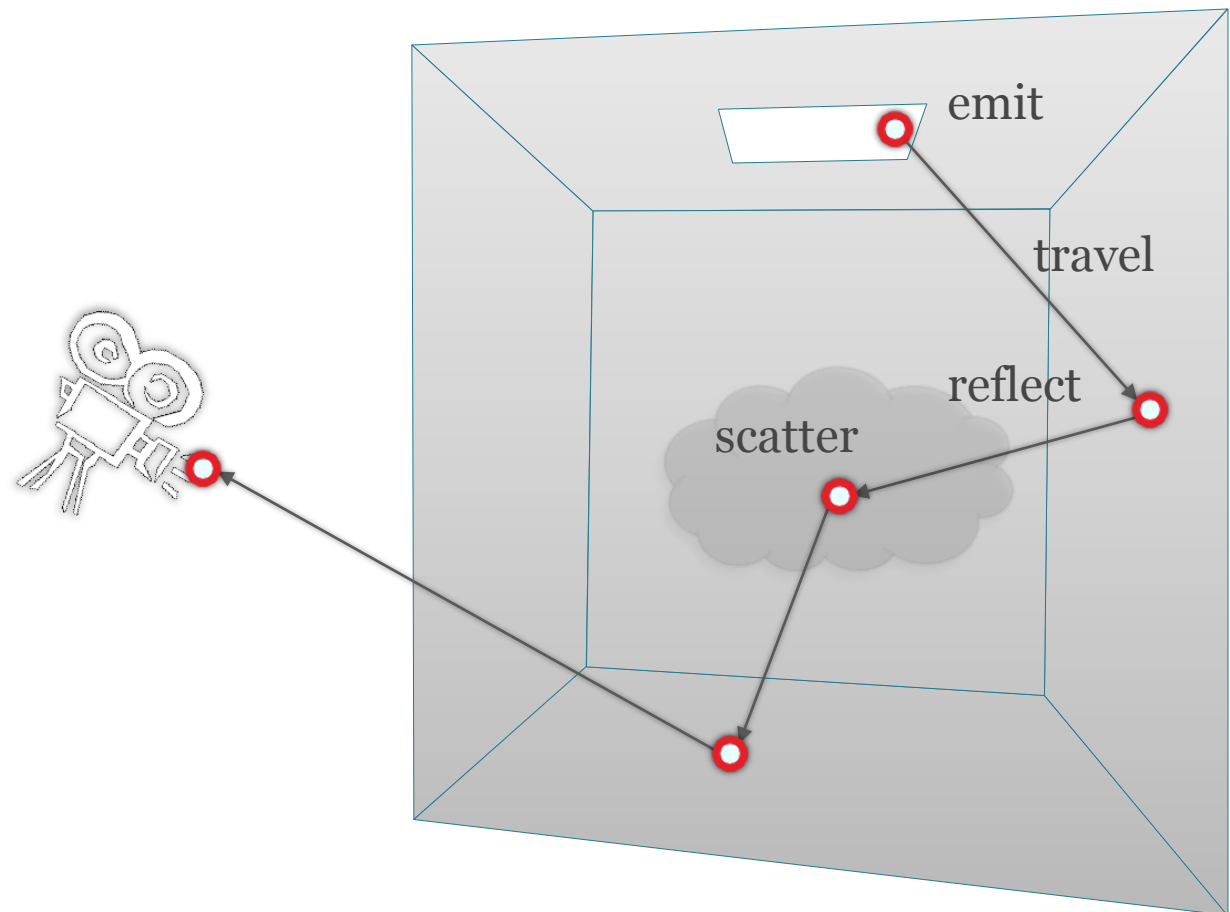
PT, 56 vzorků (cest) na pixel

Image: Eric Veach

Přenos světla jako integrál přes prostor cest

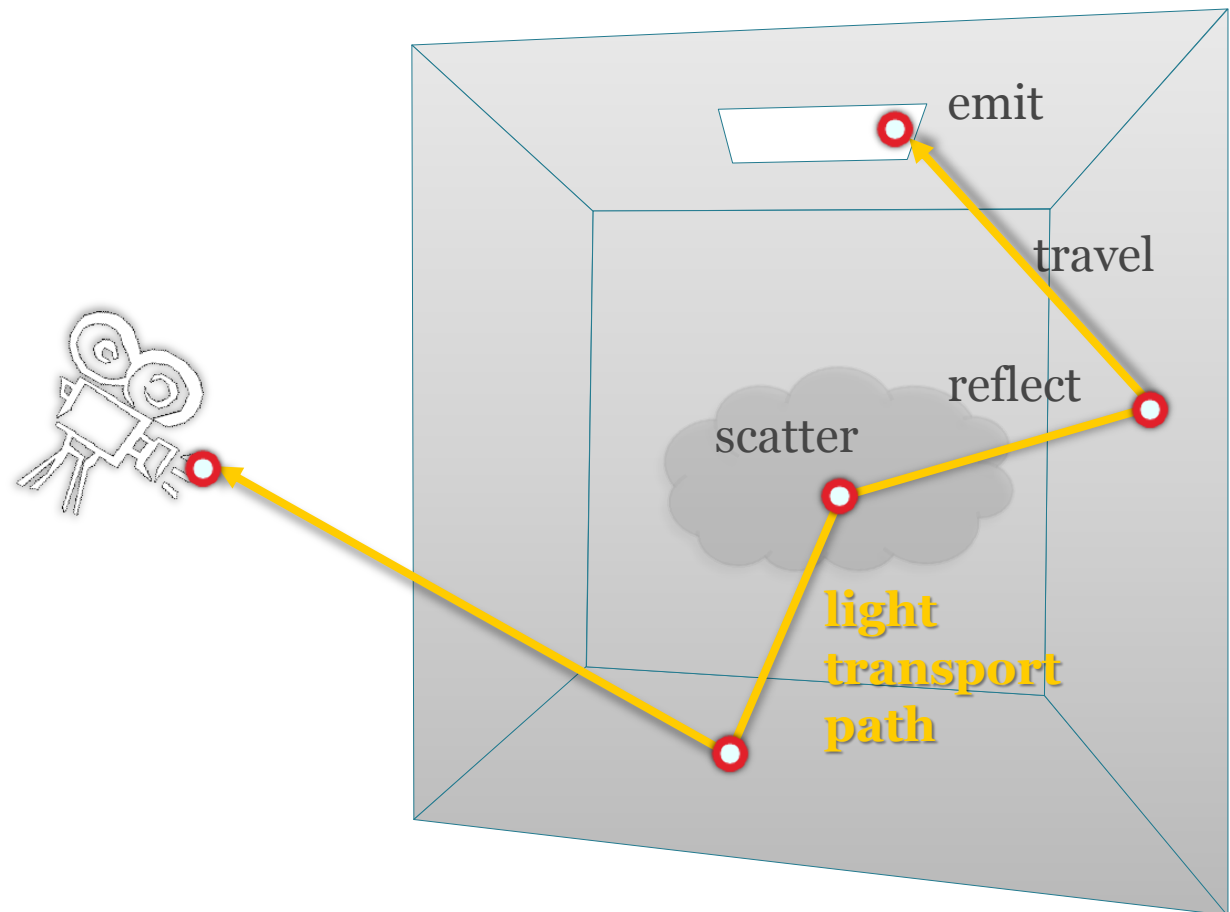
Light transport

- Geometric optics



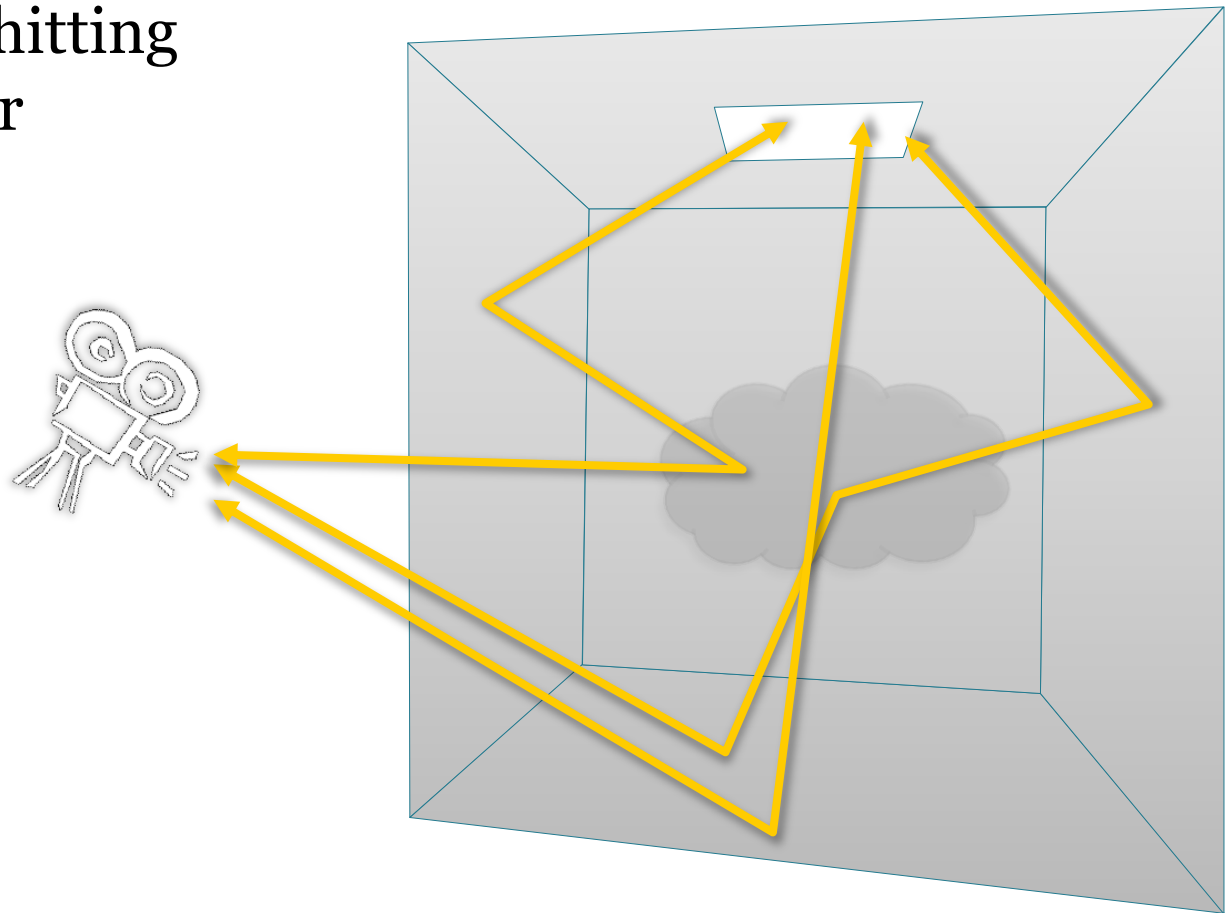
Light transport

- Geometric optics



Light transport

- **Camera response**
 - all paths hitting the sensor



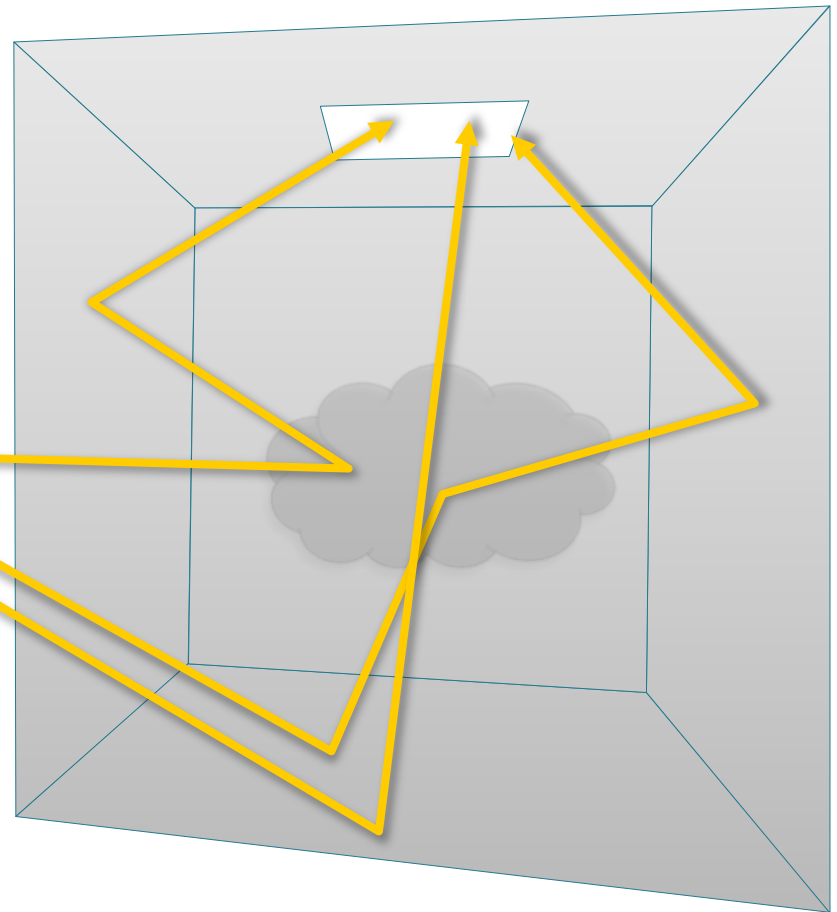
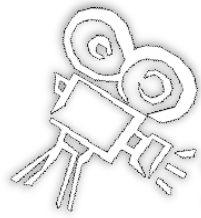
Path integral formulation

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

camera resp.
 G -th pixel value)

all paths

measurement
contribution
function



[Veach and Guibas 1995]

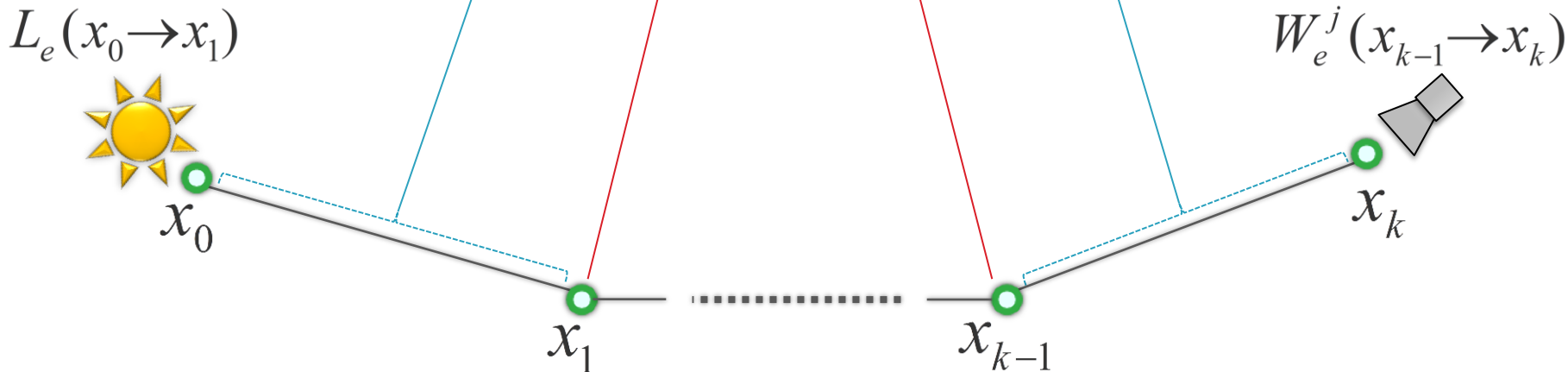
[Veach 1997]

Measurement contribution function

$$\bar{x} = x_0 x_1 \dots x_k$$

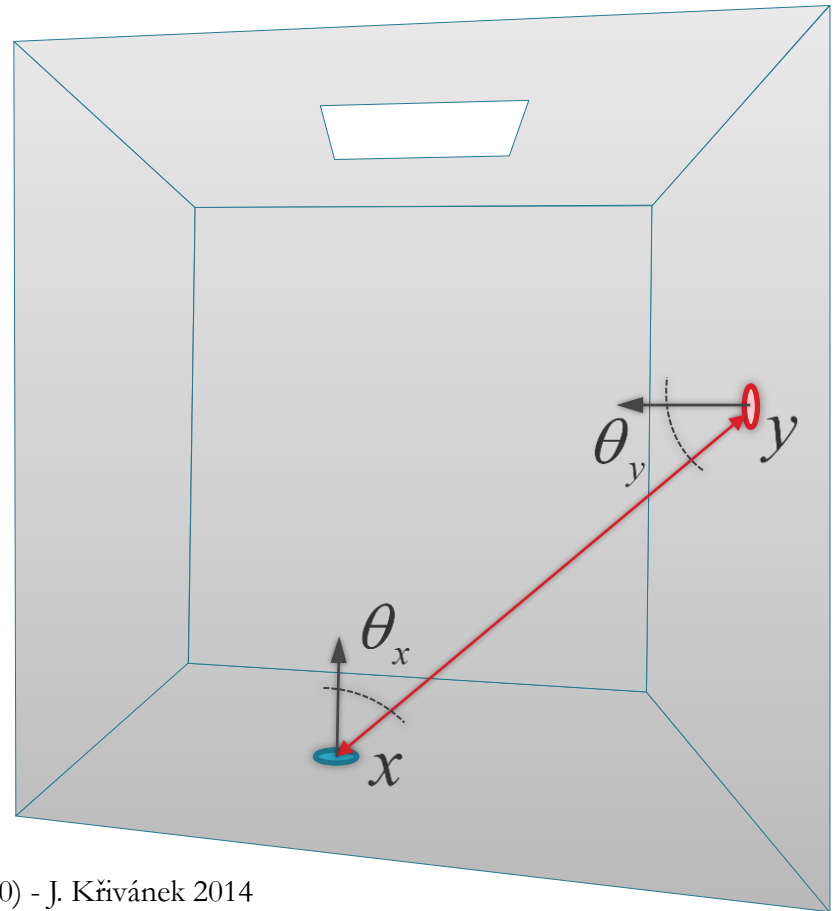
$$f_j(\bar{x}) = \underbrace{L_e(x_0 \rightarrow x_1)}_{\text{emitted radiance}} \underbrace{T(\bar{x})}_{\text{path throughput}} \underbrace{W_e^j(x_{k-1} \rightarrow x_k)}_{\text{sensor sensitivity ("emitted importance")}}$$

$$T(\bar{x}) = \underbrace{G(-)T_r(-)} \rho_s(\cdot) \dots \rho_s(\cdot) \underbrace{G(-)T_r(-)}$$



Geometry term

$$G(x \leftrightarrow y) = \frac{|\cos \theta_x| |\cos \theta_y|}{\|x - y\|^2} V(x \leftrightarrow y)$$



Path integral formulation

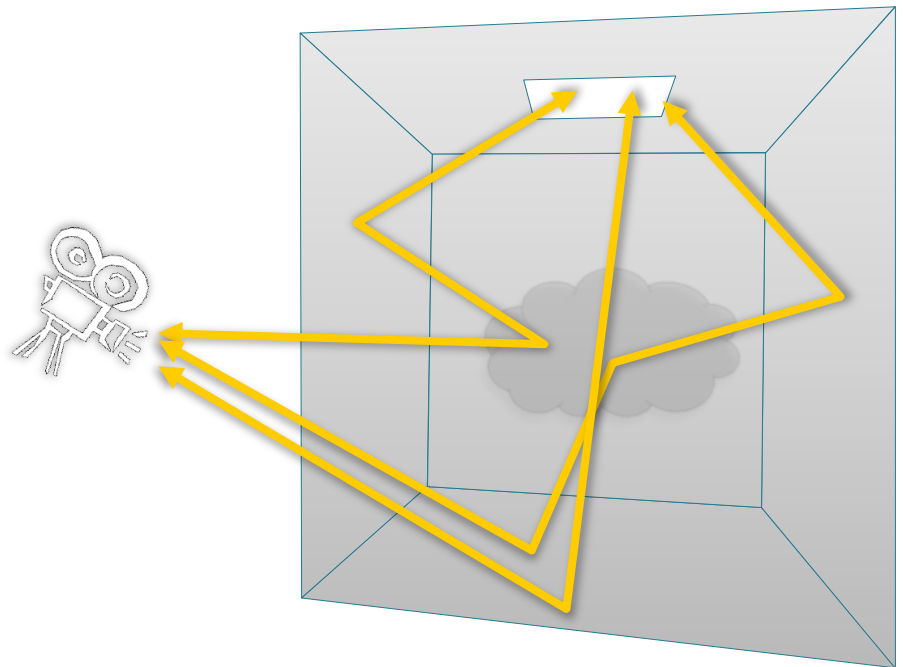
$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

camera resp.
 j -th pixel value)



all paths

measurement
contribution
function

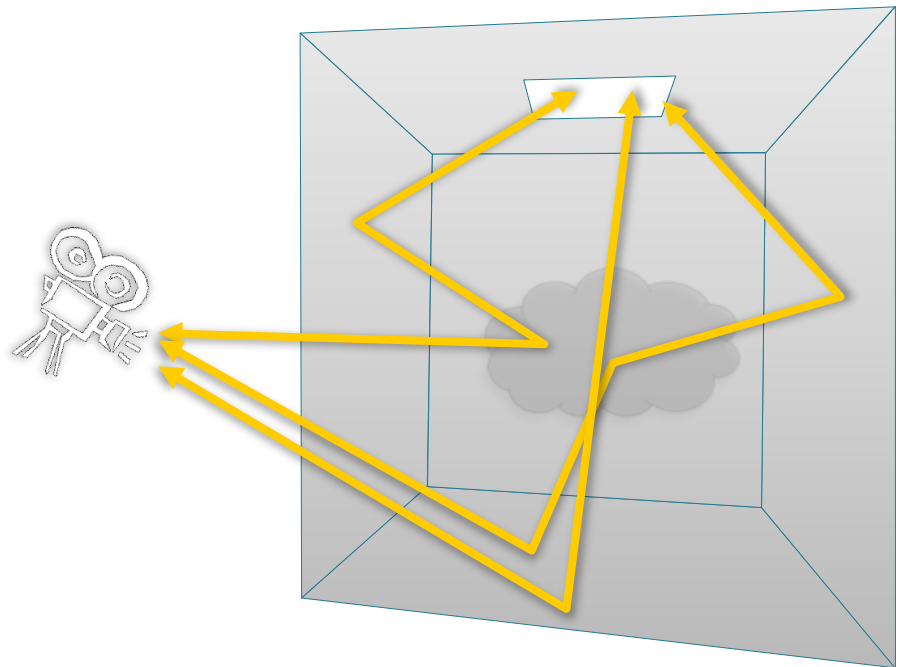


Path integral formulation

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) \, d\mu(\bar{x})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M^{k+1}} f_j(x_0 \dots x_k) \, dA(x_0) \dots dA(x_k)$$

all path lengths all possible vertex positions



Path integral

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

pixel value

all paths

contribution
function

Rendering :

Evaluating the path integral

Path integral

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

pixel value

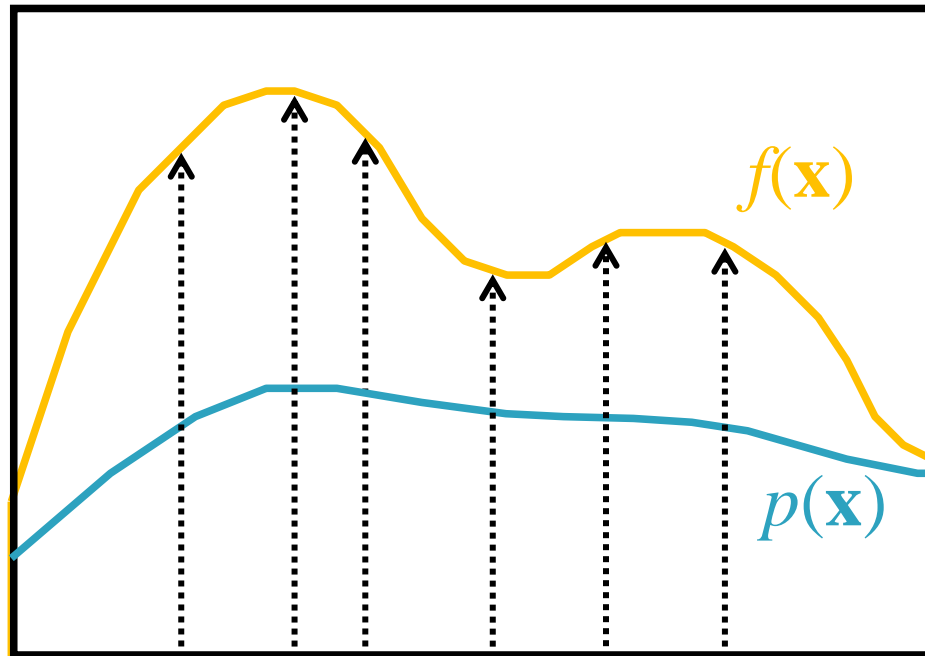
all paths

contribution
function

- **Monte Carlo integration**

Monte Carlo integration

- General approach to numerical evaluation of integrals



Integral:

$$I = \int f(x) dx$$

Monte Carlo estimate of I :

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)}; \quad x_i \propto p(x)$$

0 x_5 x_3 x_1 x_4 x_2 x_6 1 Correct „on average“:

$$E[\langle I \rangle] = I$$

MC evaluation of the path integral

Path integral

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) \, d\mu(\bar{x})$$

MC estimator

$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$

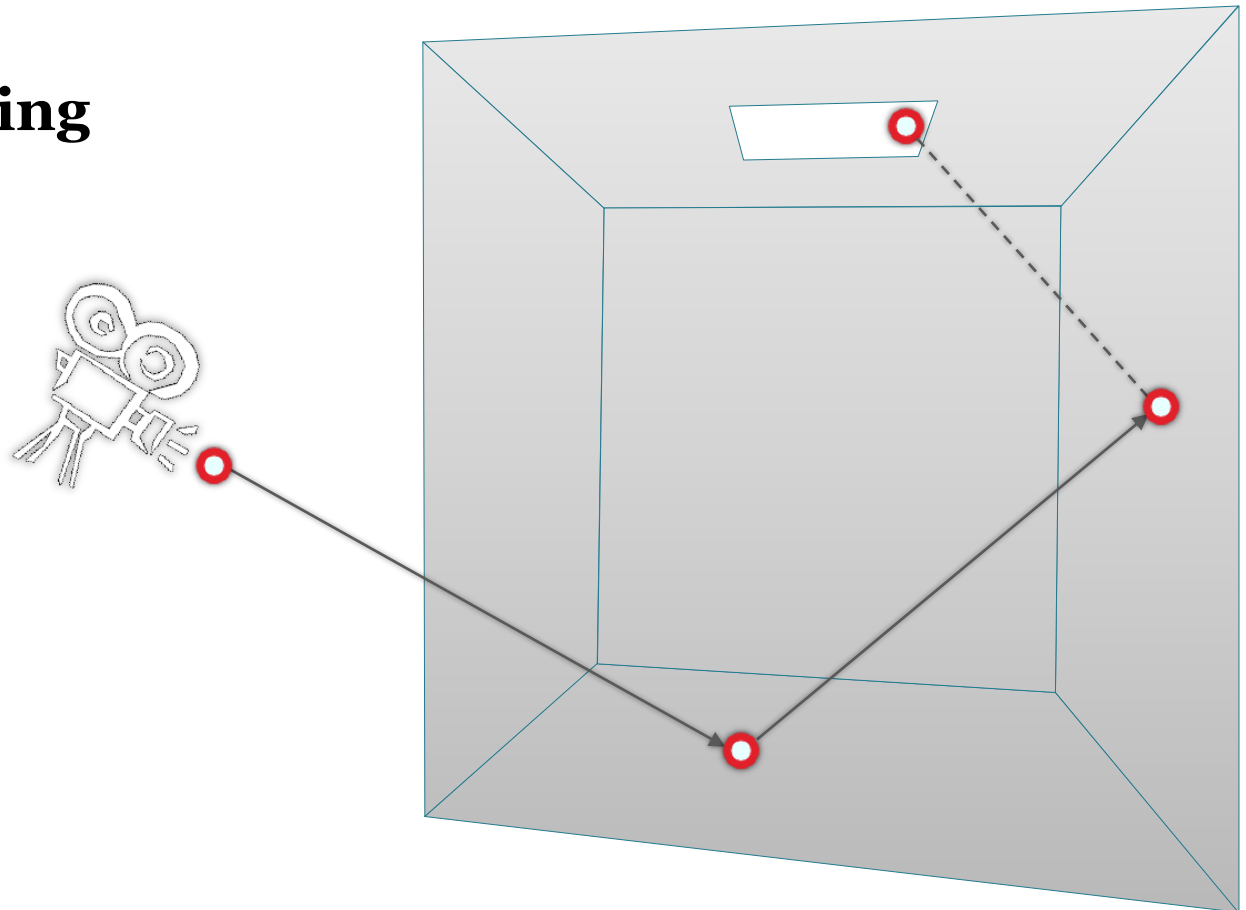
- Sample path \bar{x} from some distribution with PDF $p(\bar{x})$?
- Evaluate the probability density $p(\bar{x})$?
- Evaluate the integrand $f_j(\bar{x})$ ✓

Path sampling

- Algorithms = different path sampling techniques

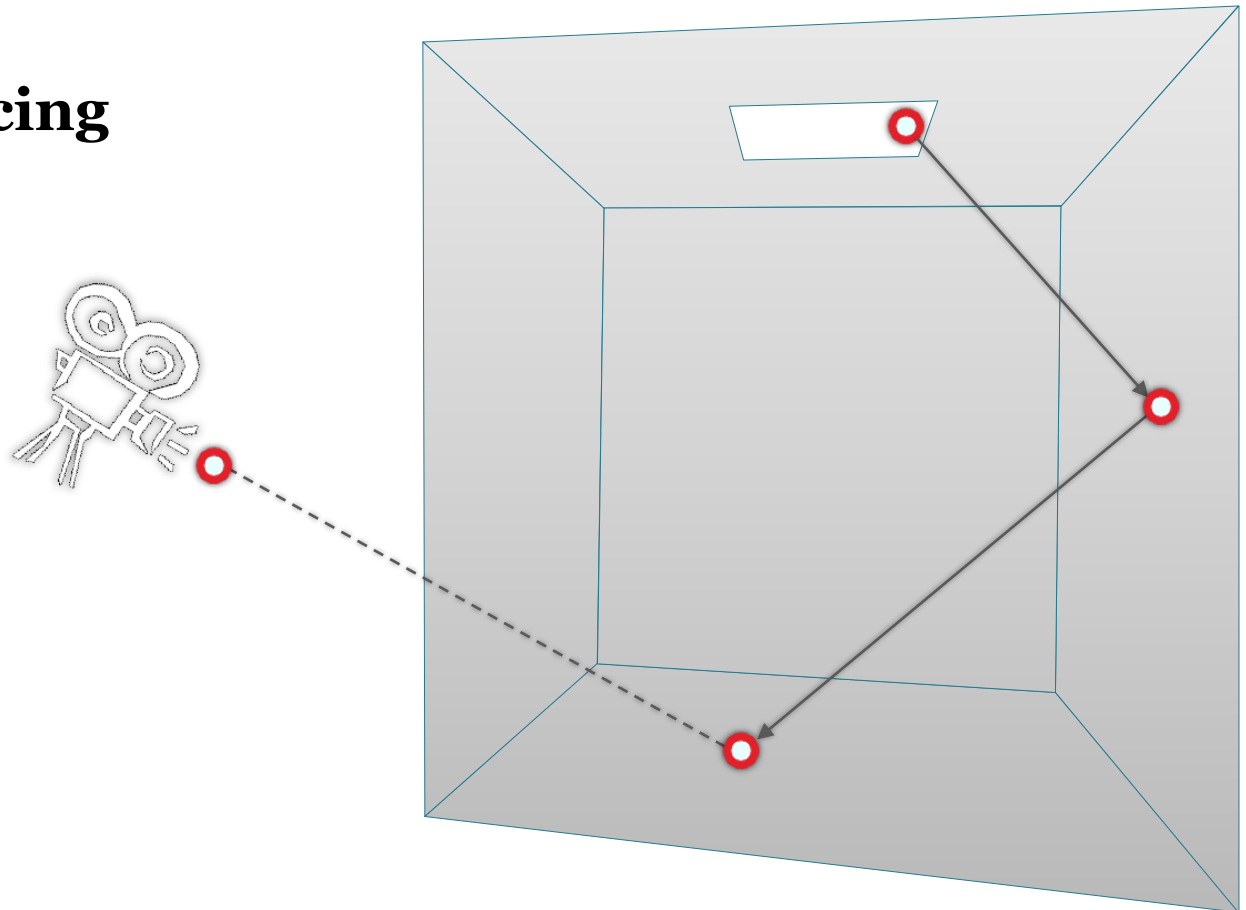
Path sampling

- Algorithms = different path sampling techniques
 - **Path tracing**



Path sampling

- Algorithms = different path sampling techniques
 - **Light tracing**



Path sampling

- Algorithms = different path sampling techniques
- **Same** general form of **estimator**

$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$

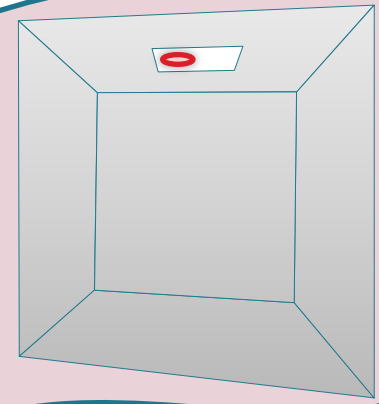
Path sampling & Path PDF

Local path sampling

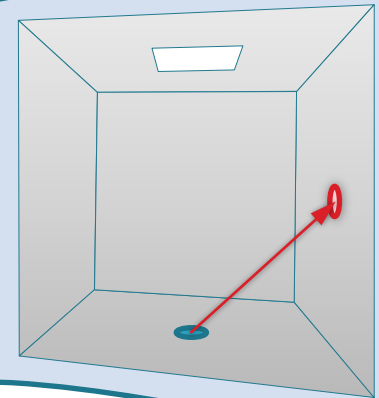
- Sample one path vertex at a time

1. From an a priori distribution

- lights, camera sensors

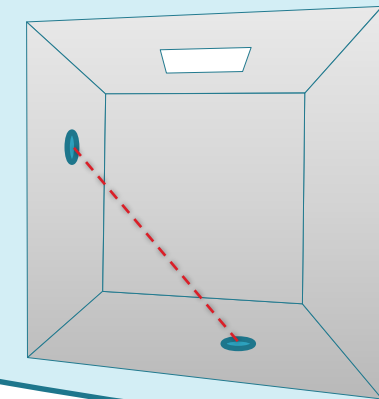


2. Sample direction from an existing vertex

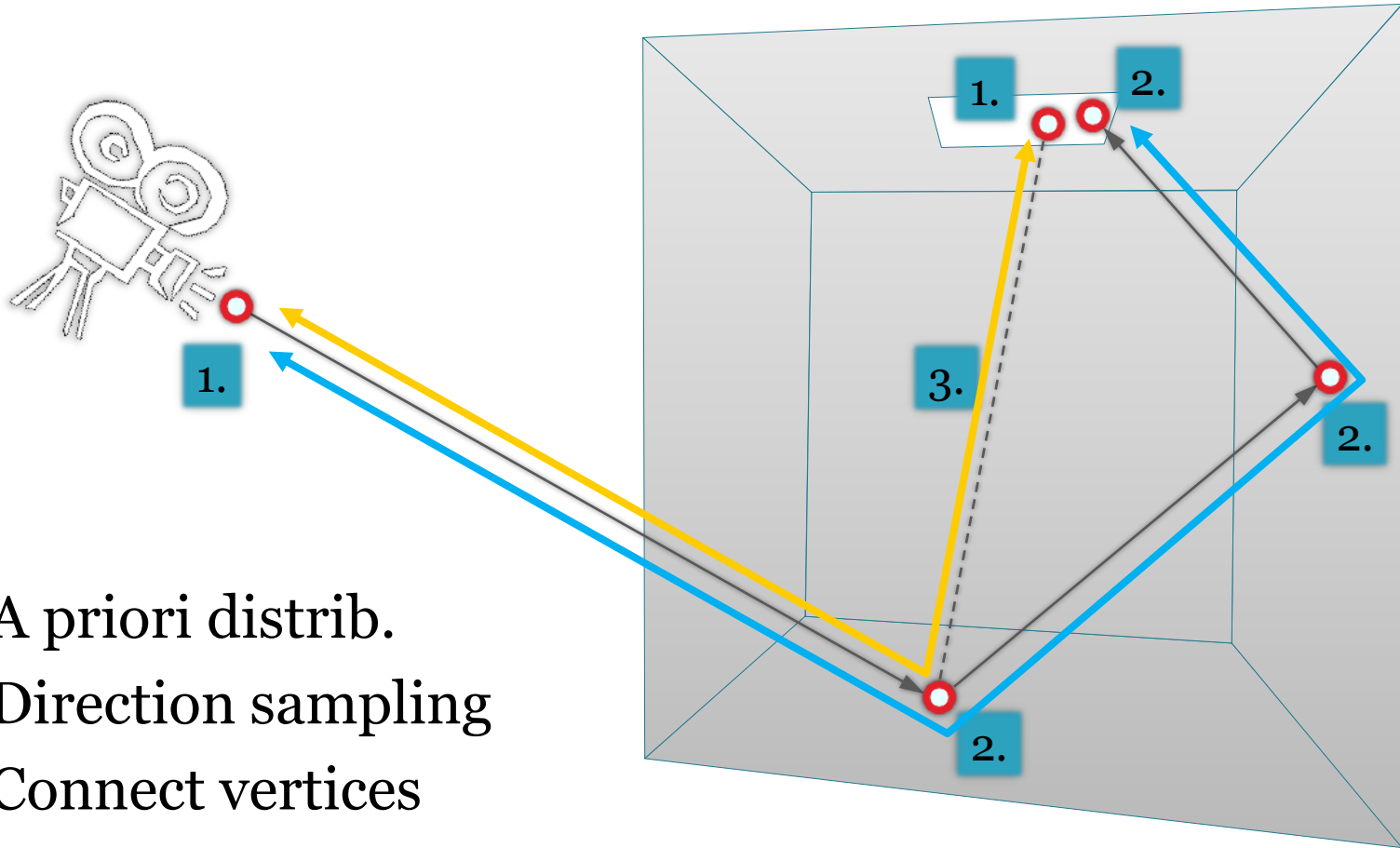


3. Connect sub-paths

- test visibility between vertices



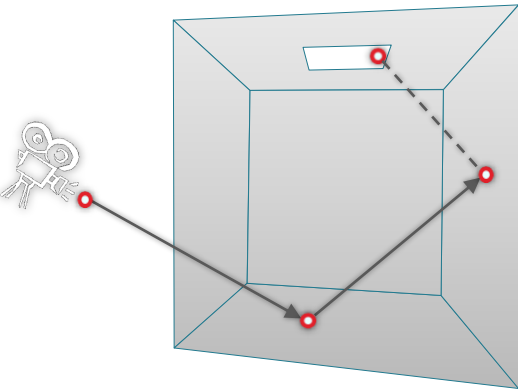
Example – Path tracing



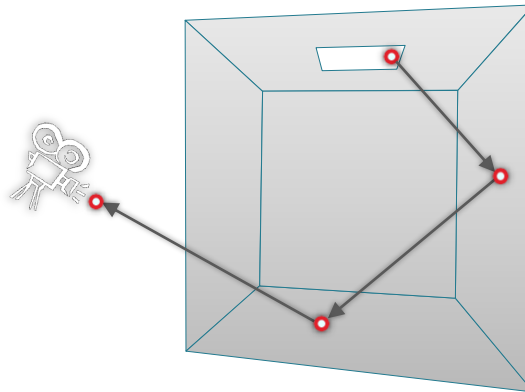
1. A priori distrib.
2. Direction sampling
3. Connect vertices

Use of local path sampling

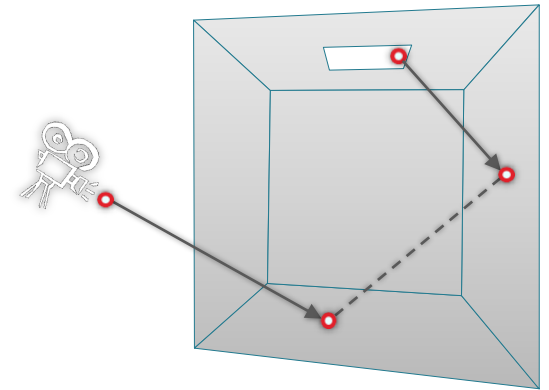
Path tracing



Light tracing



Bidirectional path tracing

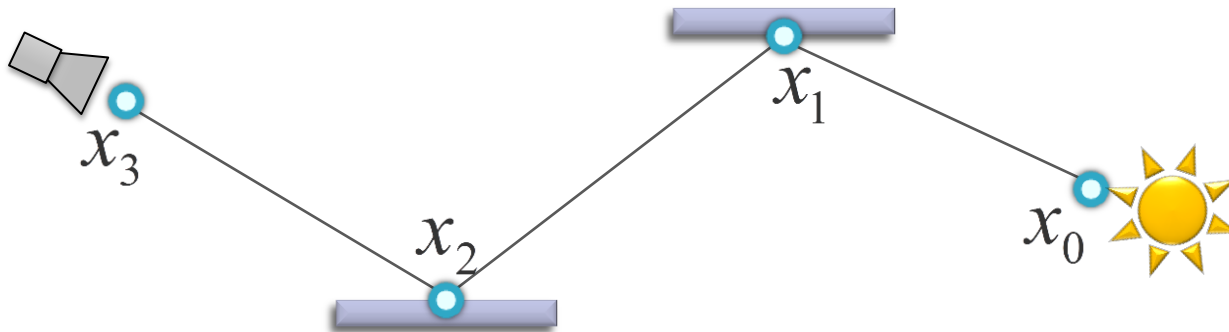


Probability density function (PDF)

path PDF

$$\underline{p(\bar{x})} = \underline{p(x_0, \dots, x_k)}$$

joint PDF of path vertices

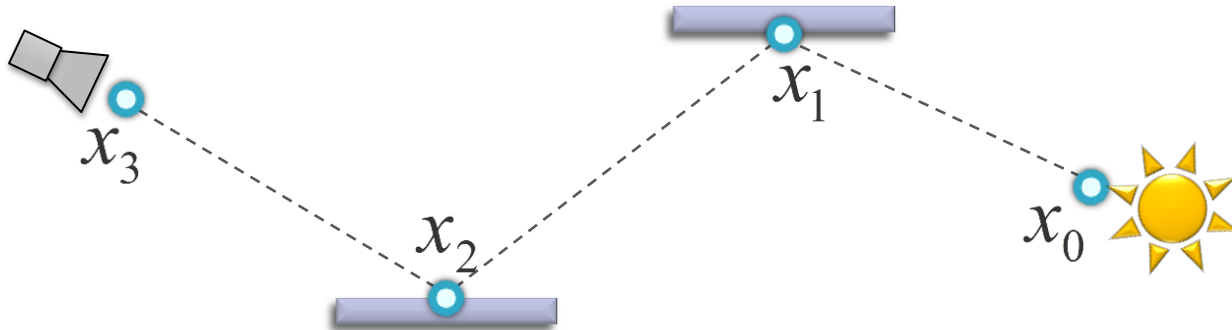


Probability density function (PDF)

path PDF

$$\underline{p(\bar{x})} = \underline{p(x_0, \dots, x_k)}$$

joint PDF of path vertices



Probability density function (PDF)

path PDF

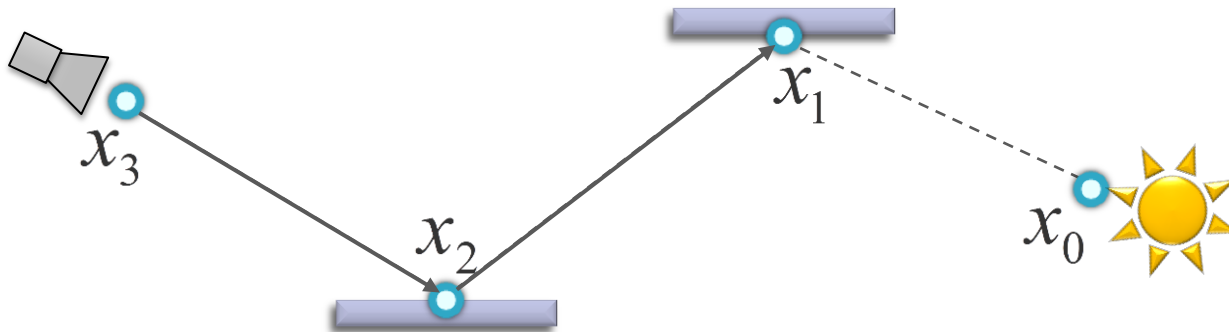
$$\underline{p(\bar{x})} = \underline{p(x_0, \dots, x_k)} = p(x_3)$$

joint PDF of path vertices

$$p(x_2 | x_3)$$
$$p(x_1 | x_2)$$
$$p(x_0)$$

product
of (conditional)
vertex PDFs

Path tracing example:



Probability density function (PDF)

path PDF

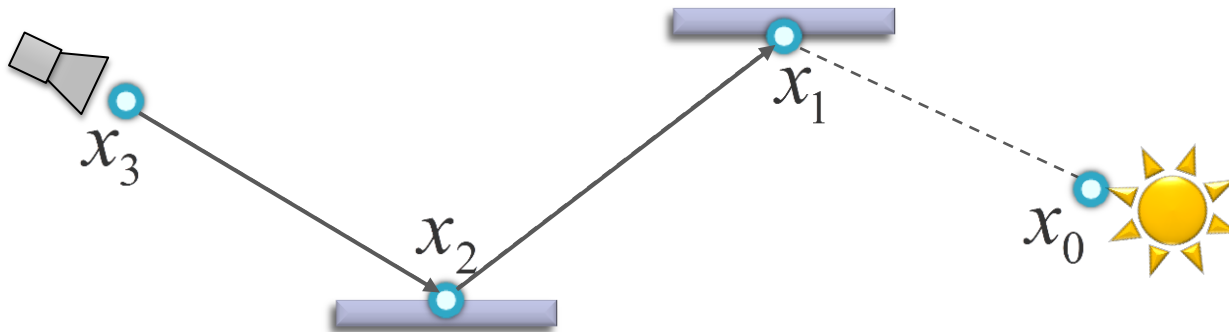
$$\underline{p(\bar{x})} = \underline{p(x_0, \dots, x_k)} = p(x_3)$$

joint PDF of path vertices

$$p(x_2)$$
$$p(x_1)$$
$$p(x_0)$$

product
of (conditional)
vertex PDFs

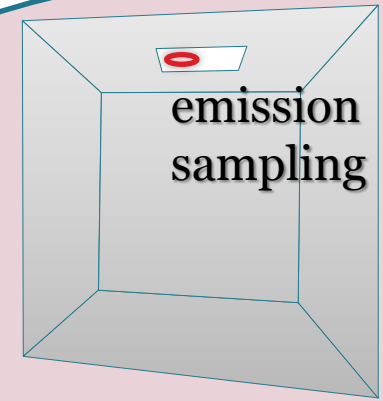
Path tracing example:



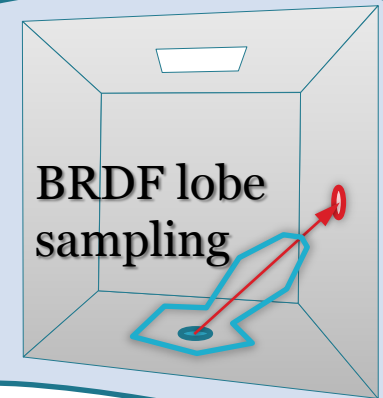
Vertex sampling

■ Importance sampling principle

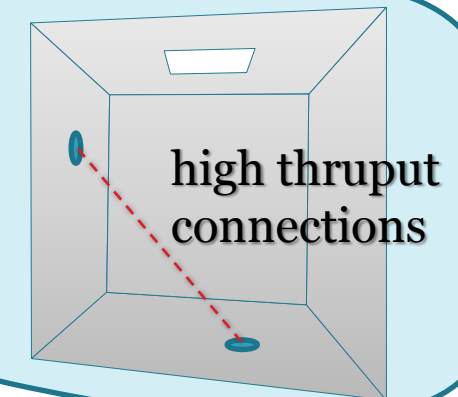
1. Sample from an a priori distrib.



2. Sample direction from an existing vertex

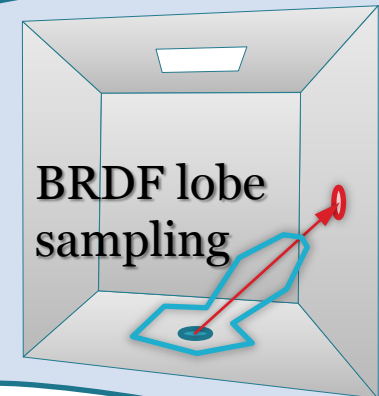


3. Connect sub-paths



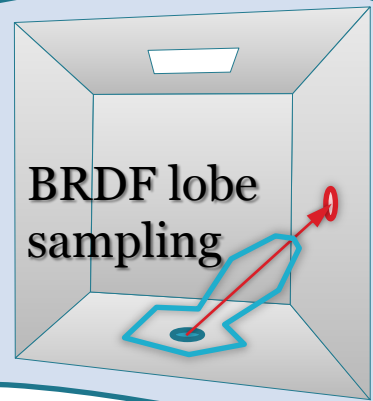
Vertex sampling

- Sample direction from an existing vertex



Measure conversion

- Sample direction from an existing vertex



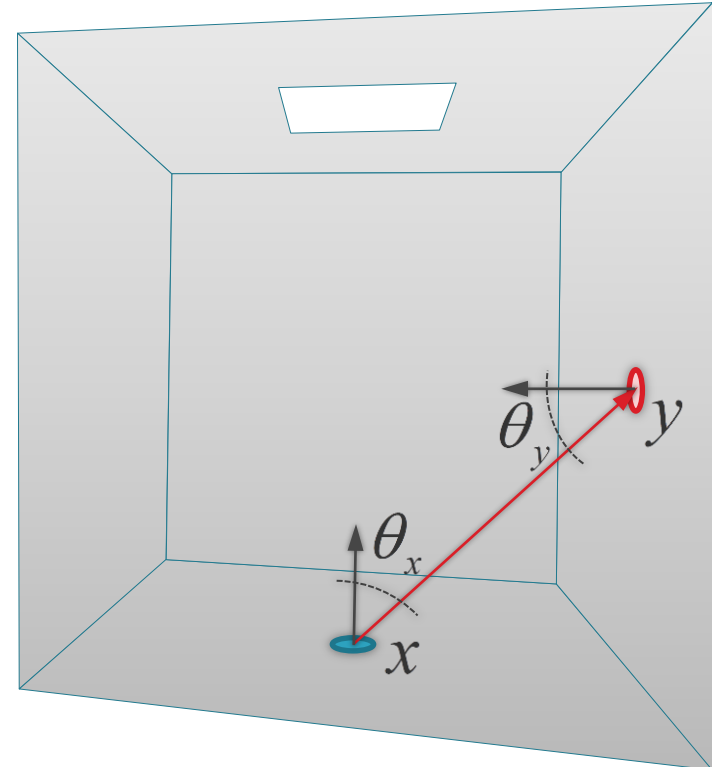
$$p(y) = p^\perp(x \rightarrow y) G(x \leftrightarrow y)$$

w.r.t. area

w.r.t. proj.
solid angle

$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$

$$= \frac{\dots \rho_s(x \rightarrow y) G(x \leftrightarrow y) \dots}{\dots p^\perp(x \rightarrow y) G(x \leftrightarrow y) \dots}$$



Summary

Path integral

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x})$$

pixel value

all paths

contribution function

MC estimator

$$\langle I_j \rangle = \frac{f_j(\bar{x})}{p(\bar{x})}$$

path pdf

sampled path

$$\bar{x} = x_0 \dots x_k$$

$$p(\bar{x}) = p(x_0) \dots p(x_k)$$

$$f_j(\bar{x}) = L_e G(x_0 \leftrightarrow x_1) \rho_s(x_1) \dots \rho_s(x_{k-1}) G(x_{k-1} \leftrightarrow x_k) W_e^j$$

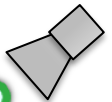


x_0

x_1

x_{k-1}

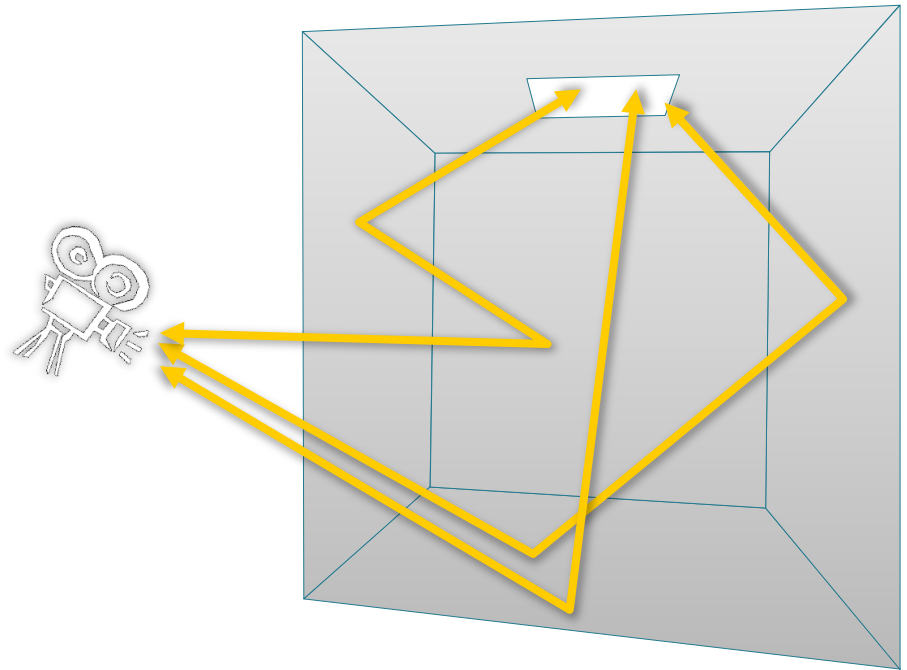
x_k



Summary

■ Algorithms

- ❑ different path sampling techniques
- ❑ different path PDF



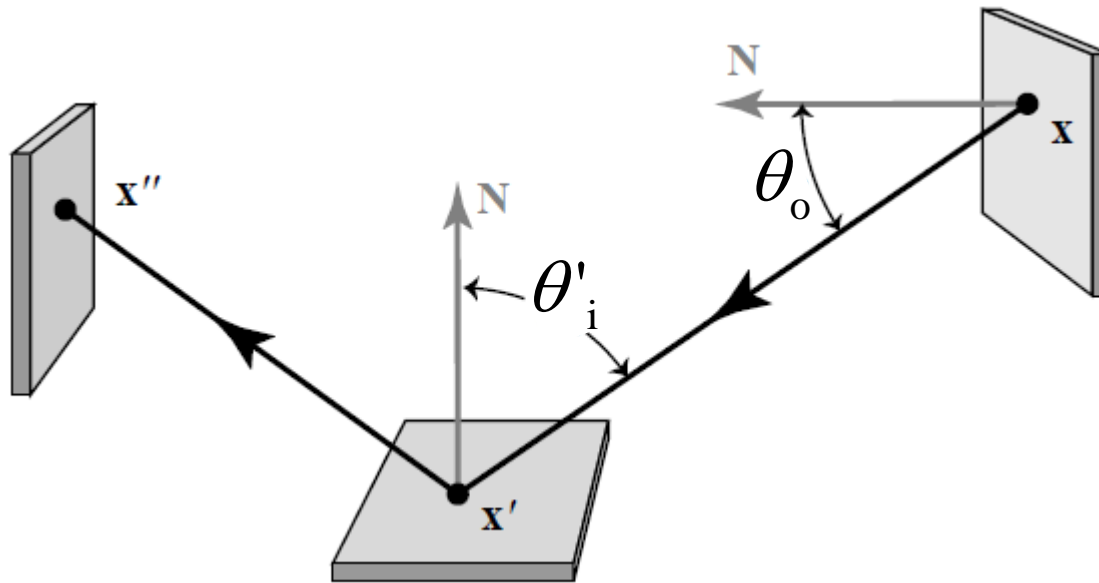
Why is the path integral view so useful?

- Identify source of problems
 - **High contribution paths** sampled with **low probability**
- Develop solutions
 - Advanced, global **path sampling techniques**
 - **Combined** path sampling techniques (MIS)

Odvození integrálu přes prostor cest ze zobrazovací a měřicí rovnice

Třibodová formulace přenosu světla

- Eliminace směrů (pouze body na ploše)



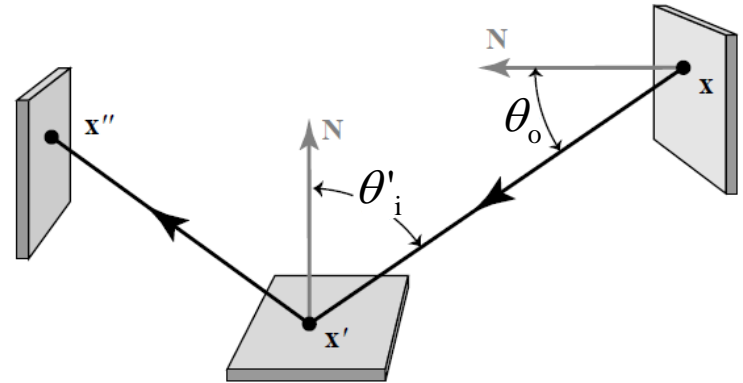
- Zavedeme značení:

$$L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \equiv L(\mathbf{x}, \omega)$$

$$f_r(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') \equiv f_r(\mathbf{x}', \omega_i \rightarrow \omega_o)$$

Zobrazovací rovnice v 3b formulaci

- Pomocí tohoto značení přeformulujeme ZR



$$L(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') = L_e(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') + \int_M L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \cdot f_r(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') dA_x$$

$$G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') = V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') \frac{|\cos \theta_o \cos \theta'_i|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}$$

Měřicí rovnice v 3b formulaci

$$I_j = \int_{M \times M} W_e^{(j)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \cdot L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') dA_{\mathbf{x}} dA_{\mathbf{x}'}$$

Důležitost emitovaná z \mathbf{x}' do \mathbf{x}
(Značení: šipka = směr šíření světla, nikoli důležitosti)

\mathbf{x}' ... na senzoru

\mathbf{x} ... na ploše scény

Odvození integrálu přes prostor cest

- Do měřicí rovnice v 3b formulaci se dosadí Neumannova expanze ZR v 3b formulaci, vypadne suma integrálů.
- Integrand je funkcí příspěvku (contribution function).

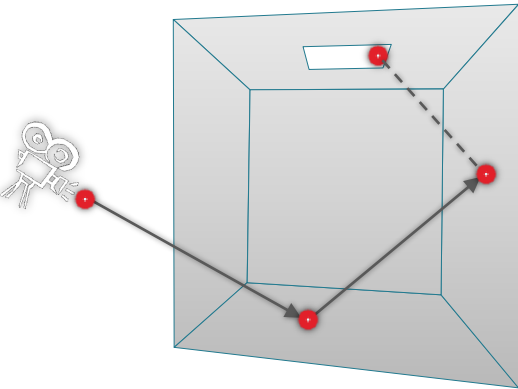
“Path integral” – A historical remark

- This course [Veach and Guibas 1995], [Veach 1997]
 - Easily derived from the rendering equation [Veach 1997]
- Feynman path integral formulation of quantum mechanics [Feynman and Hibbs 65]
- Homogeneous materials [Tessendorf 89, 91, 92]
- Rendering [Premože et al. 03, 04]

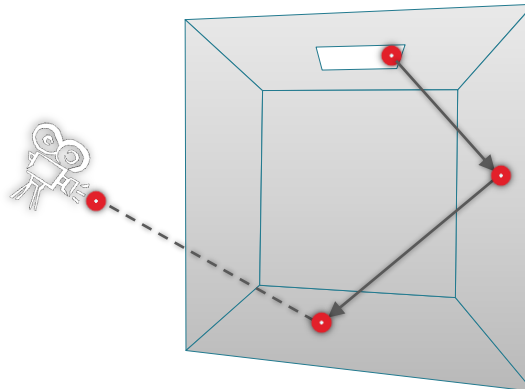
Obousměrné sledování cest (Bidirectional path tracing)

Bidirectional path tracing

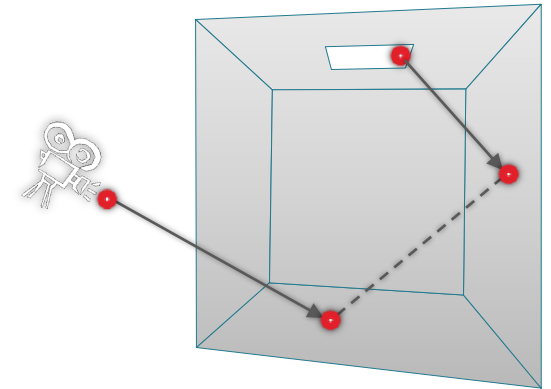
Path tracing



Light tracing



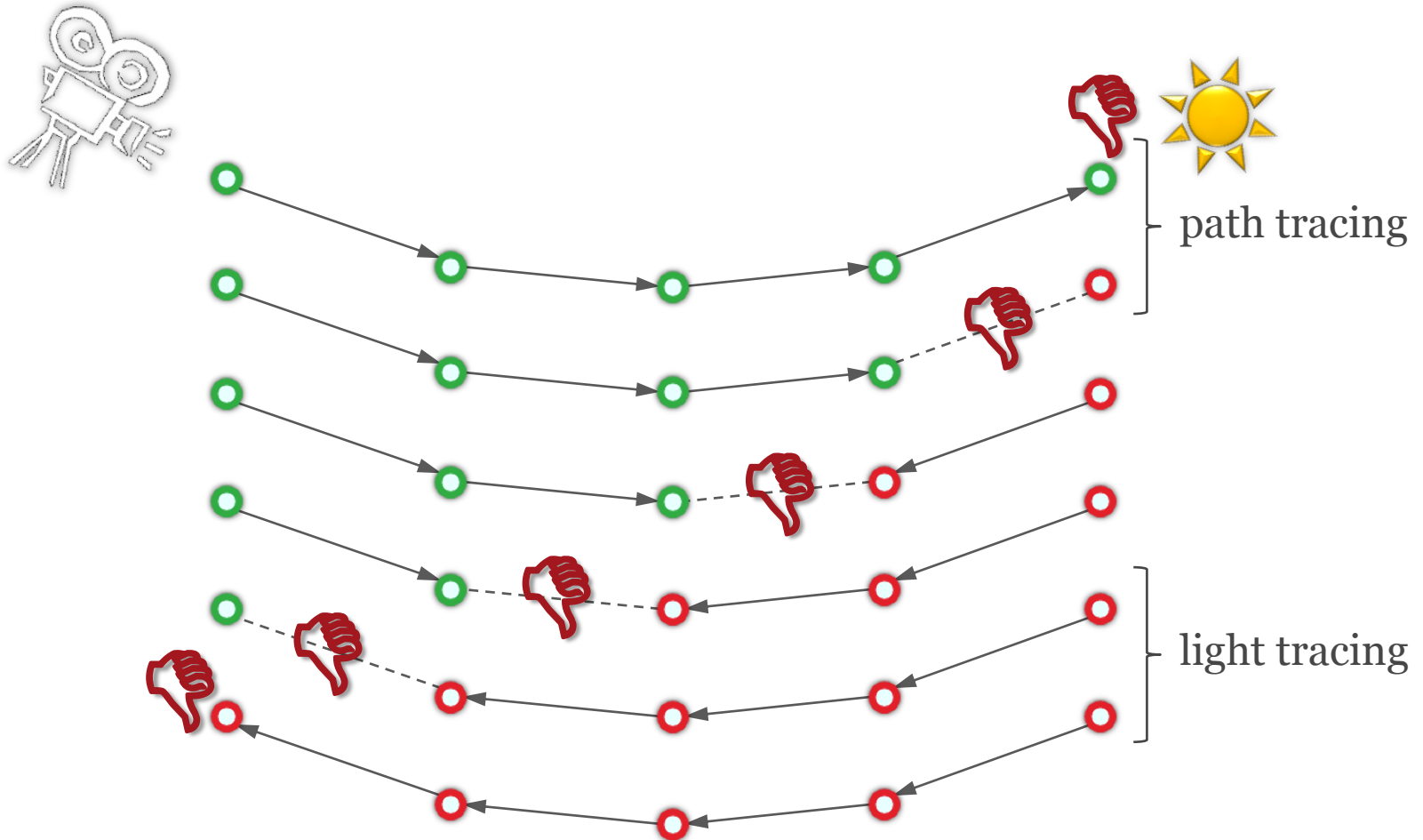
Bidirectional path tracing



All possible bidirectional techniques

○ vertex on a **light sub-path**

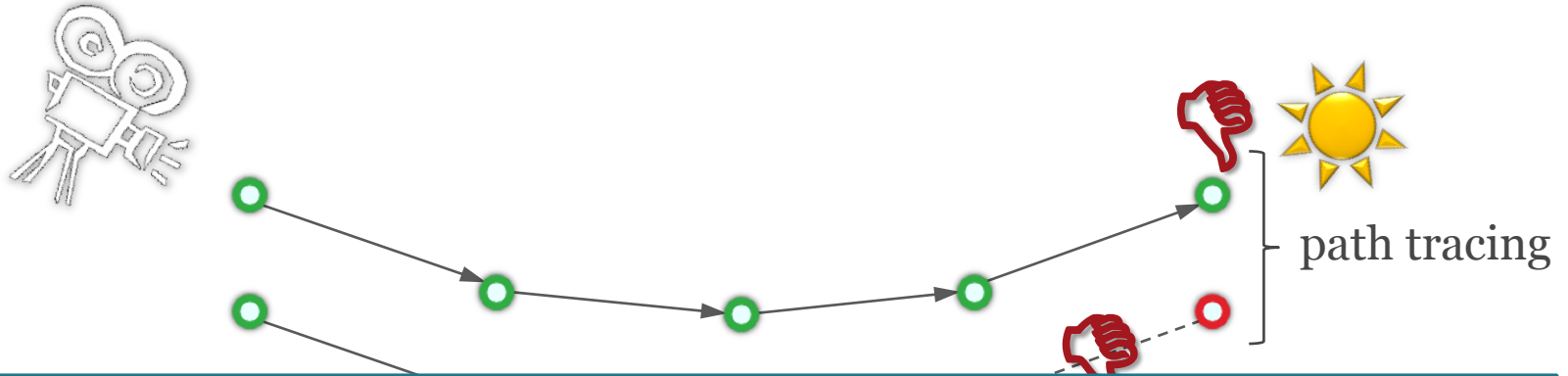
○ vertex on an **eye sub-path**



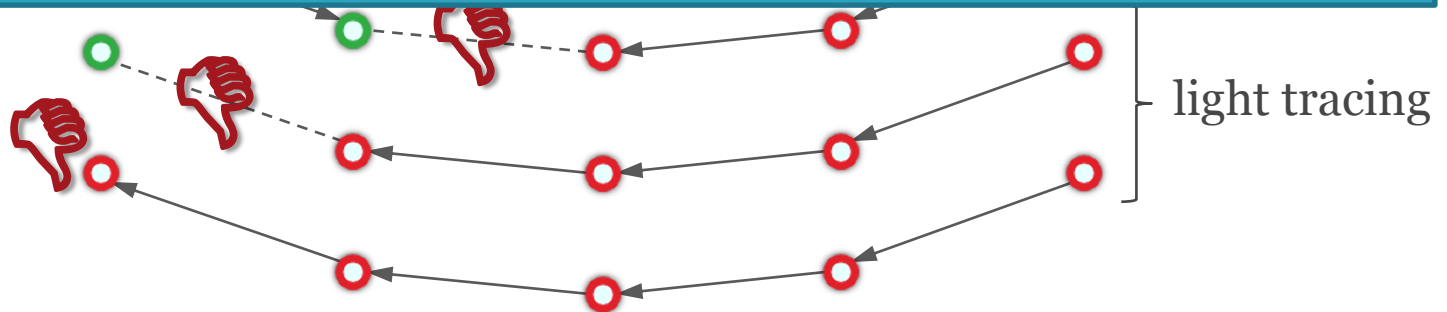
All possible bidirectional techniques

○ vertex on a **light sub-path**

○ vertex on an **eye sub-path**



no single technique importance
samples all the terms

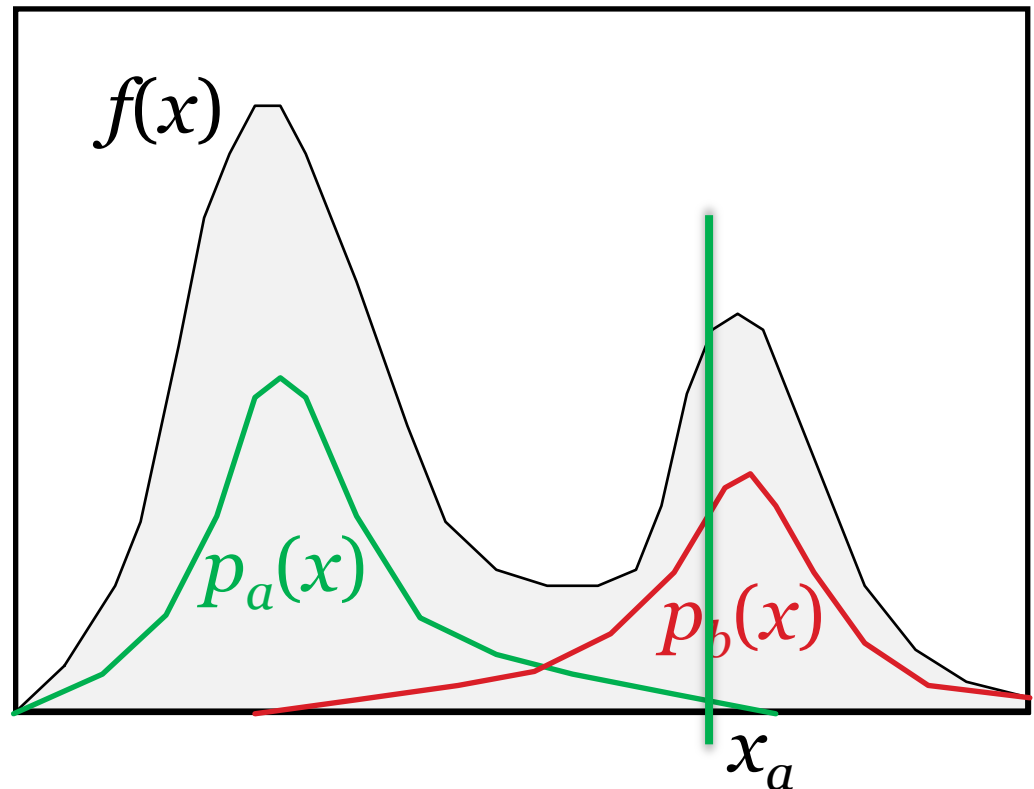


Multiple Importance Sampling (MIS)

[Veach & Guibas, 95]

**A simple
combined
estimator:**

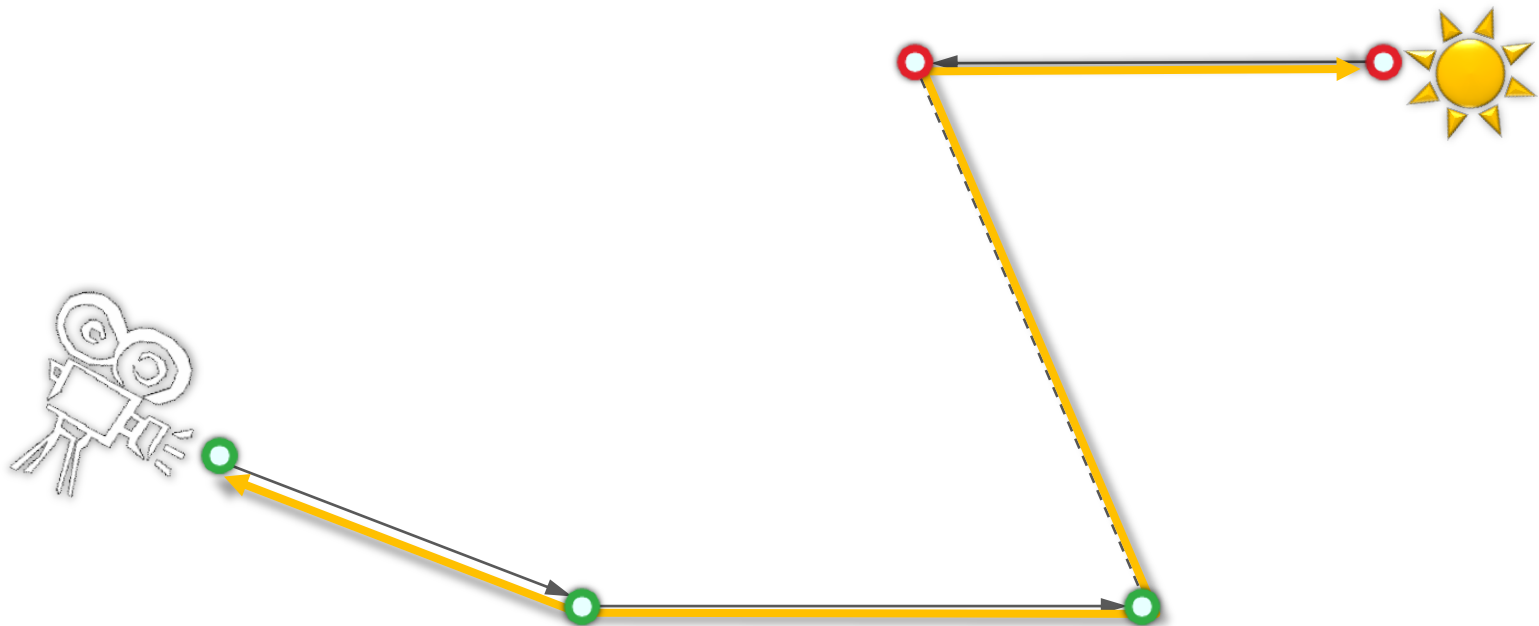
$$\langle I \rangle = \frac{f(x)}{[p_a(x) + p_b(x)]/2}$$



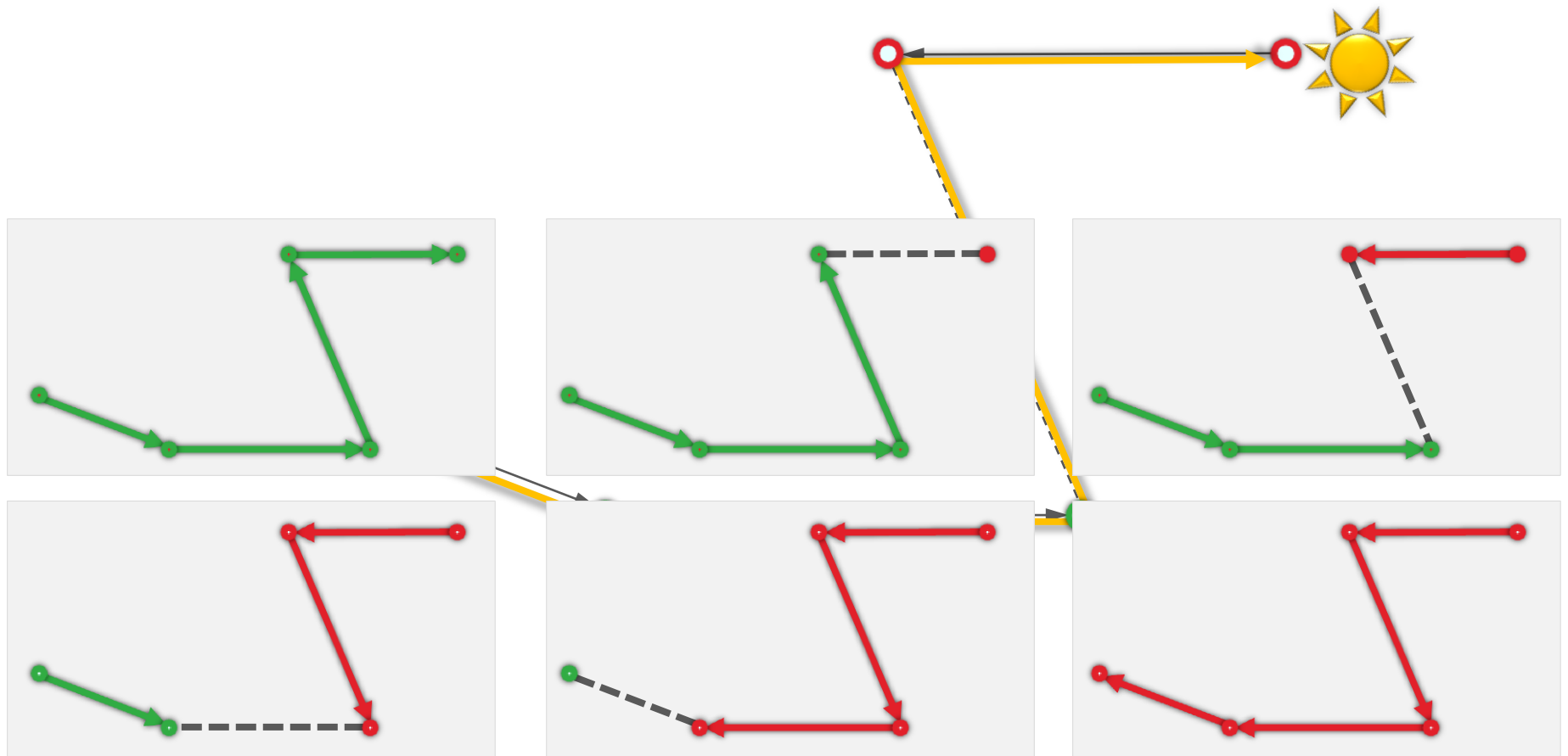
Bidirectional path tracing

- Use **all** of the above sampling techniques
- Combine using **Multiple Importance Sampling**
- Generalizes the combined strategy for calculating direct illumination in a path tracer
 - **PT**: Different strategies for sampling a direction toward a light source
 - **BPT**: Different strategies for sampling **entire light transport paths**

Naive BPT

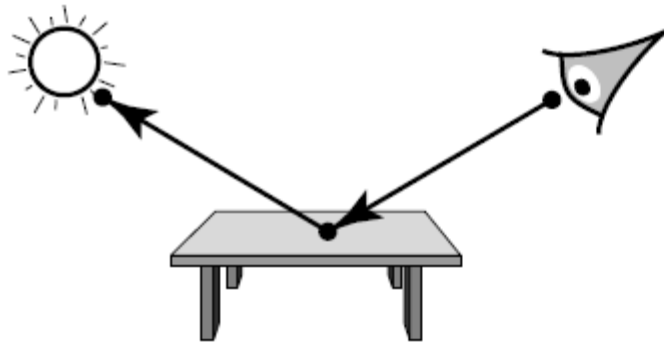


MIS weight calculation

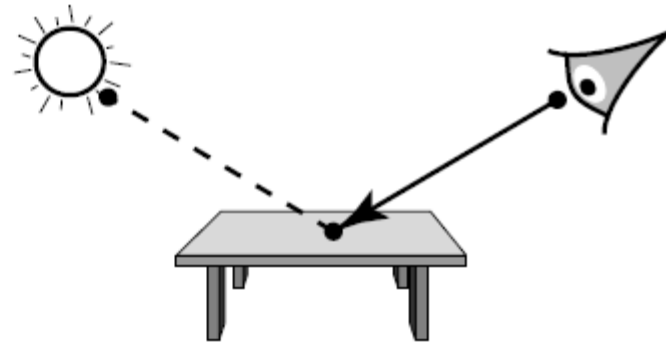


Vzorkovací techniky v BPT

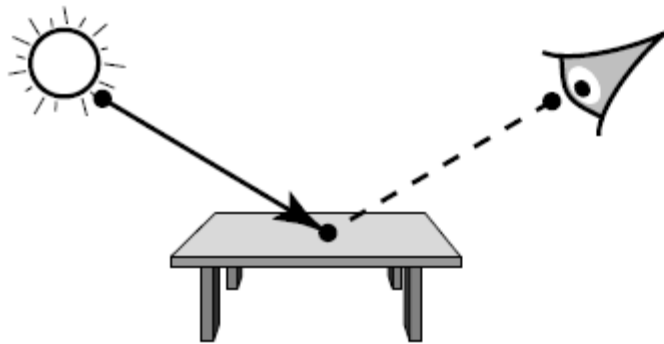
Příklad: Čtyři vzorkovací techniky pro $k = 2$



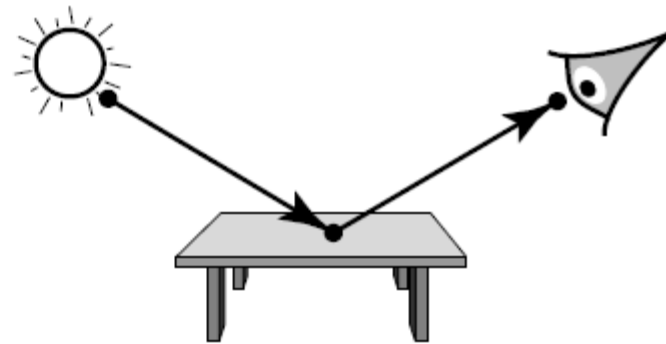
(a) $s = 0, t = 3$



(b) $s = 1, t = 2$



(c) $s = 2, t = 1$



(d) $s = 3, t = 0$

Image: Eric Veach

Vzorkovací techniky v BPT

- Podcesta o t vrcholech vzorkovaná z kamery
- Podcesta o s vrcholech vzorkovaná ze světla
- Spojovací segment délky 1
- Celková délka cesty: $k = s + t - 1$ (segmentů)

- $k+2$ možností pro generování cesty délky k

Vzorkovací techniky v BPT

- Každá technika má **jinou hustotu** $p_{s,t}$
- Každá je účinná při vzorkování jiných světelných efektů
- Všechny techniky odhadují **stejný integrál**

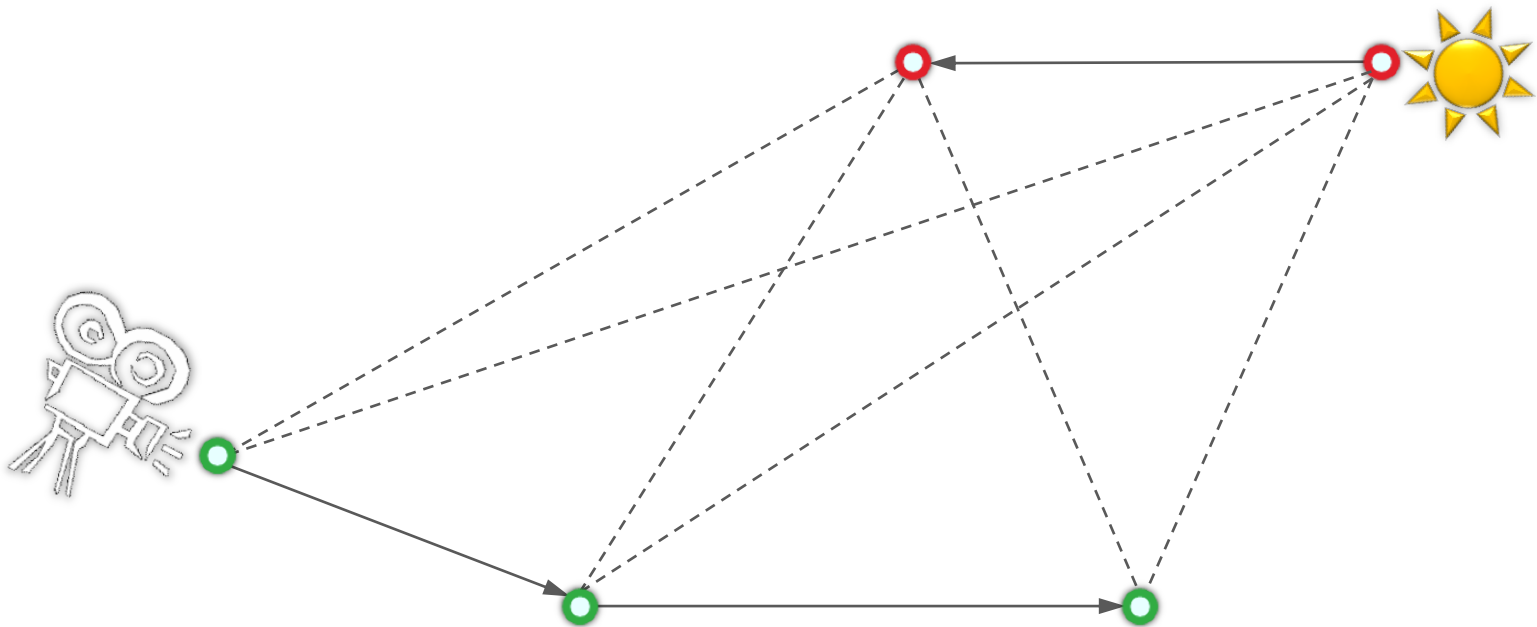
Kombinace vzorkovacích technik

- Kombinovaný estimátor (MIS)

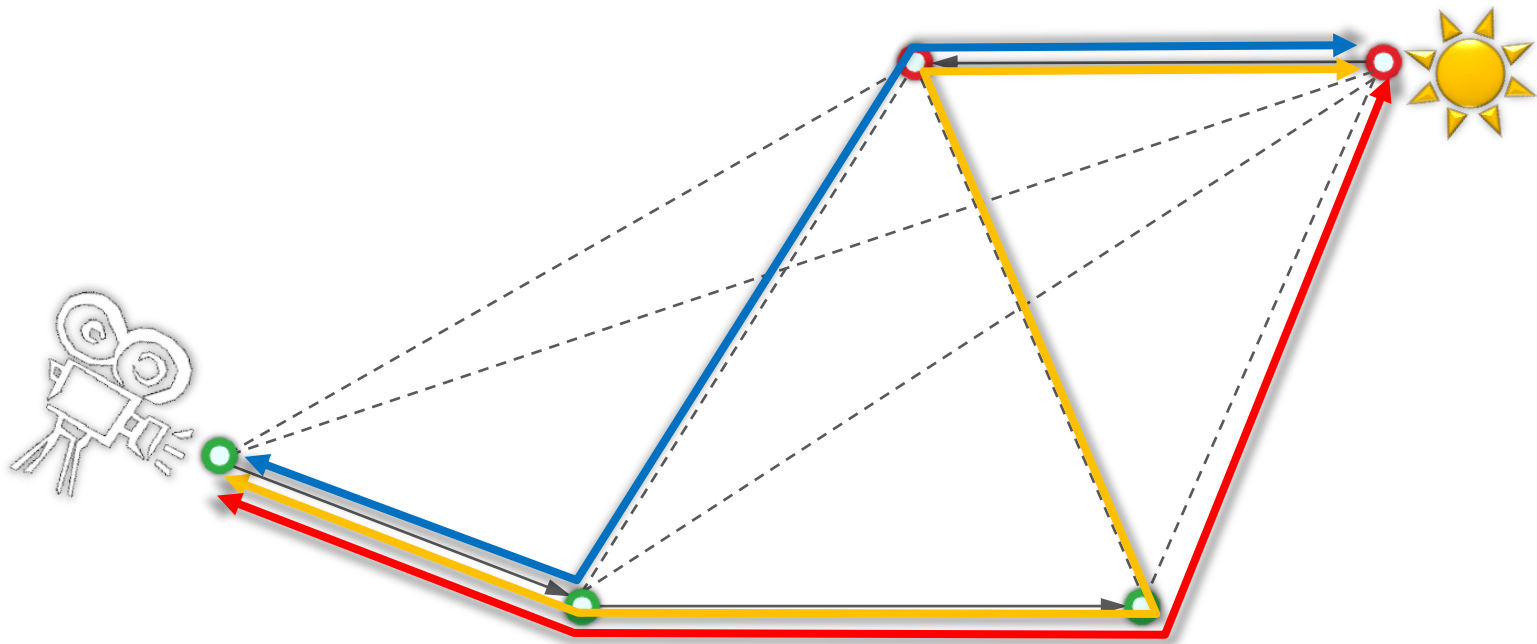
$$F = \sum_{s \geq 0} \sum_{t \geq 0} w_{s,t}(\bar{x}_{s,t}) \frac{f_j(\bar{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\bar{x}_{s,t})}$$

kombinační strategie
(např. vyvážená heuristika)

BPT Implementation in practice



BPT Implementation in practice



BPT Implementation in practice

- Generuj podcestu náhodné délky **od světla**

$$Y_0 \cdots Y_{n_L-1}$$

- Generuj podcestu náhodné délky **od kamery**

$$Z_{n_E-1} \cdots Z_0$$

- Spoj každý **prefix cesty od světla** s každým **sufixem cesty od kamery**

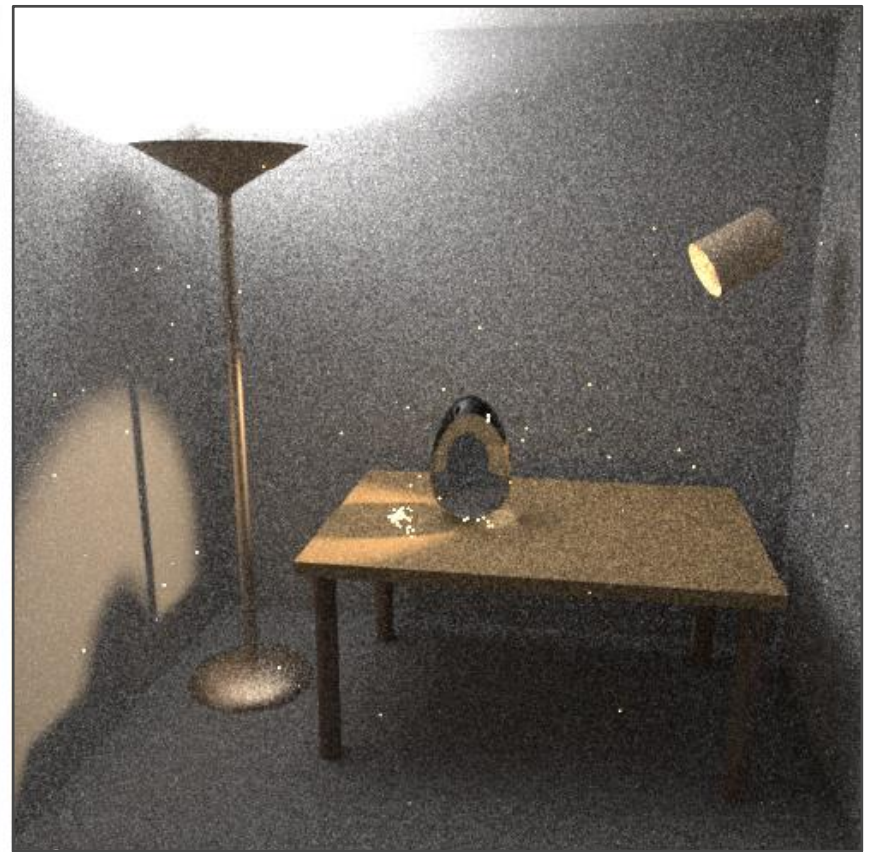
$$\bar{x}_{s,t} = Y_0 \cdots Y_{s-1} Z_{t-1} \cdots Z_0$$

(cesta = vzorek z hustoty $p_{s,t}$)

Results

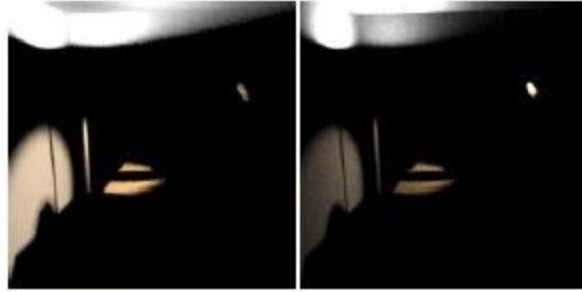


BPT, 25 samples per pixel



PT, 56 samples per pixel

Images: Eric Veach



$k = 2$
(2x)



$k = 3$
(4x)



$k = 4$
(8x)



$k = 5$
(16x)

$s = 1$

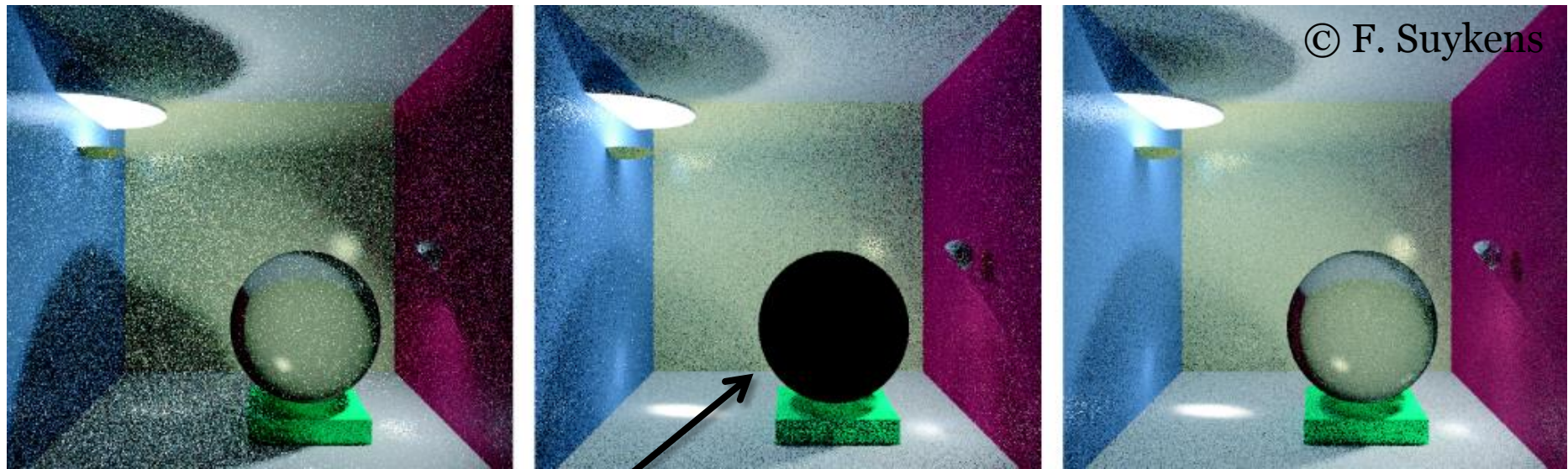
$s = 2 \dots$

$t = 2$

$t = 1$

$s / t =$ počet vrcholů na podceste od světla / kamery

Porovnání algoritmů



Path tracing

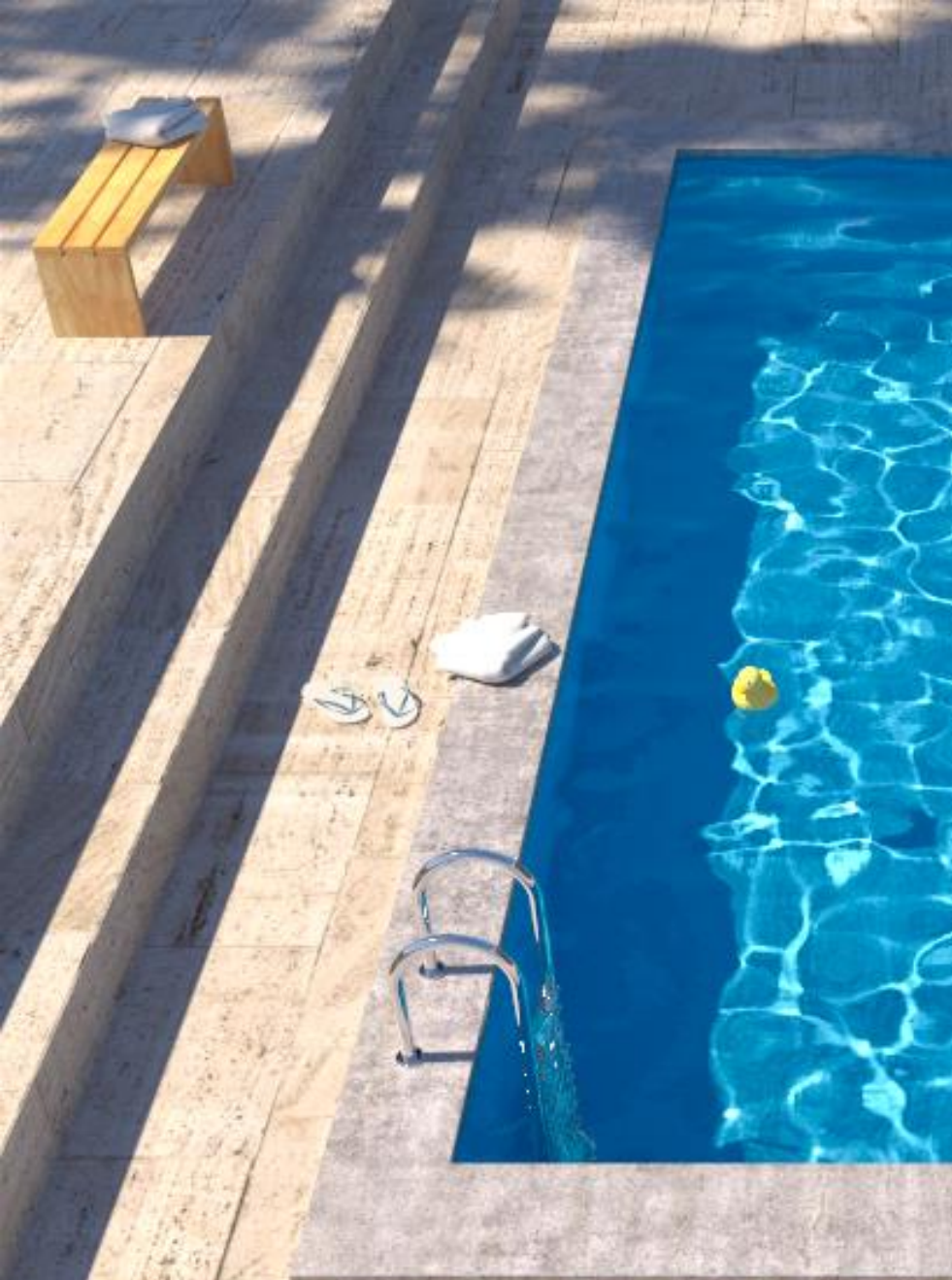
Light tracing

Bidirectional path tracing

Kvíz: Proč je skleněná koule černá?

LIMITATIONS OF LOCAL PATH SAMPLING



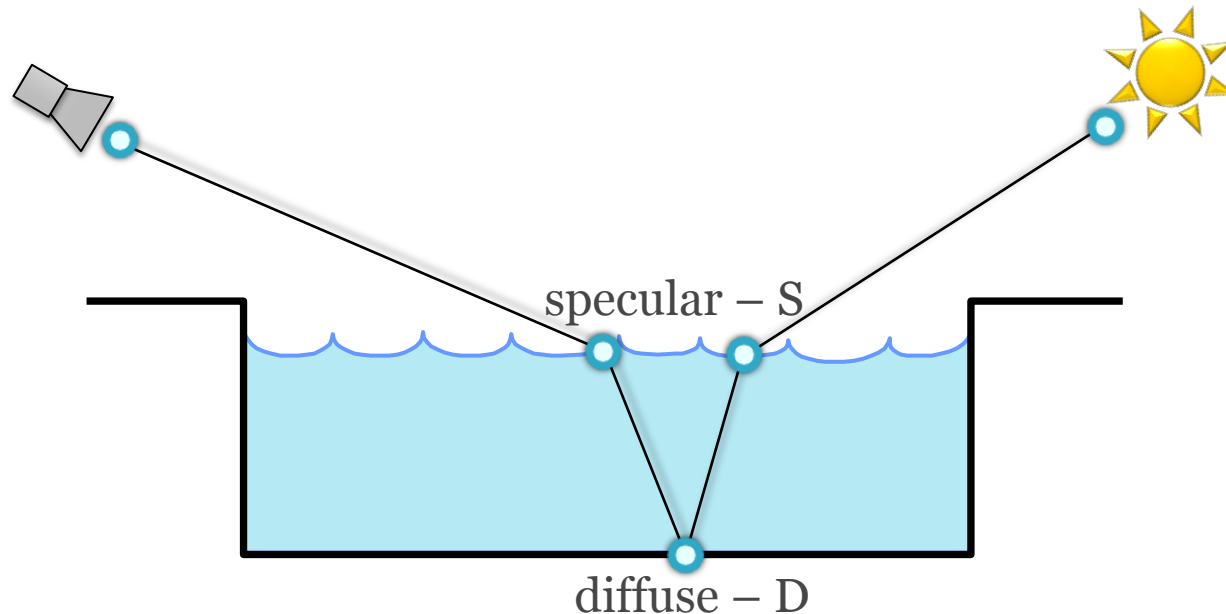


Reference solution

Bidirectional path tracing

Insufficient path sampling techniques

- Some paths sampled with zero (or very small) probability



Alternatives to local path sampling

- **Global path sampling – Metropolis light transport**
 - Initial proposal still relies on local sampling
- Leave path integral framework
 - Density estimation – **photon mapping**
- **Unify** path integral framework and density estimation
 - **Vertex Connection & Merging**

Konec

E. Veach: *Robust Monte Carlo methods for light transport simulation*, PhD thesis, Stanford University, 1997, pp. 219-230, 297-317

http://www.graphics.stanford.edu/papers/veach_thesis/